॥ श्रीगणेशायनमः ॥

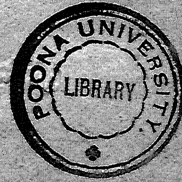
श्रीभास्कराचार्यकृत

लीलावतीचें सोपपत्तिक भाषांतर.

हा ग्रंथ

विनायक पांडुरंग शास्त्री खानापूरकर

यांनीं तयार केला.



तो

हरि विनायक साठे

यांनीं छापविला.

शके १८१९ सन १८९७.

किंमत दोन रुपये.

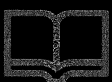
पुणें पेठ सदाशिव येथें इंदिरा छापखान्यांत छापिला.

हा ग्रंथ

कै. वा. रा. ब. केरो लक्ष्मण छत्रे. कै. वा. रा. सा. रावजी मोरेश्वर देवकुळे. कै. वा. वे. शा. रा. भाऊ दीक्षीत सातारकर. तीर्थस्वरूप बाळजोशी खानापुरकर. वे. शा. सं. रा. रामशास्त्री गोडबोले माहुलीकर.

या गुरुवर्य पंचकांस

त्यांची विद्वत्ता व उत्तम शिक्षणपद्धति ह्या गुणांच्या अभिनंदनार्थ कर्त्यानें अत्यादर पूर्वक अर्पण केला आहे.



Some of the opinions given by the learned about this book, are given below,:—

Poona.

Dear Sir

I was glad to receive your Translation of Bhaskaracharya's Lilavati. I could read some of the important articles in the book. I was agreeably surprised to find that the laws of Combinations and Permutations, volumes of Pyramids and Trustums, properties of triangles and quadrilaterals inscribed in a circle and many other things equally interesting and difficult should have been investigated as early as in the times of BhaskaraCharya. You have much added to the usefulness of the book by supplying the theory portion and the work may now be read with interest by students of Mathematics in Schools and Colleges.

In conclusion I may add that you have turned to a good account the help extended to you by your patrons and hope that the present will be the second of the series of Matnematical works expected from you.

Iam dear Sir

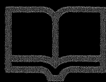
yours truly

Vishnu Balvant Gokhale. M. A.

Principal Maharashtra College.

Poona—11th February 1893.

I have examined Mr. Vinayak Shastri Khanapurkar's translation of BhaskaraCharya's Lilavati. It is prepared in the same manner as the writer's translation of BhaskaraCharya's Algebra. Both these works have been translated but no attempt has been made to explain all the laconic rules given by BhaskaraCharya.

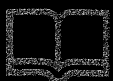


गोब्राह्मणप्रतिपालक श्रीमंत श्रीनिवासराव पंतप्रतिनिधी साहेब संस्थान औंध यांनीं आश्रय देऊन मजकडून ज्योतिःशास्त्राचें अध्ययन करविलें. त्यामुळें आपल्या हातून कांहीं तरी देशसेवा घडावी ह्मणून आर्यज्योतिःशास्त्राच्या उन्नतीच्या संबंधानें माझ्या मनांत तीन उद्देश उद्भवले. त्यांतील पहिला उद्देश—आपल्या ज्योतिःशास्त्रामध्यें सिद्धांतशिरोमणि, सूर्यसिद्धांत, ब्रह्मगुप्तसिद्धांत, आर्यभटसिद्धांत इत्यादि जे ग्रंथ आहेत त्यांची सोपपत्तिक भाषांतरें करावींत असा आहे. दुसरा उद्देश—आपल्या ज्योतिःशास्त्रामध्यें सांगोपांग जे विषय कमी आहेत. ते सर्व इंग्रजी ज्योतिःशास्त्रांतून घेऊन नवीन ग्रंथ गद्यात्मक किंवा पद्यात्मक संस्कृत भाषेमध्यें किंवा महाराष्ट्र भाषेमध्यें करावेत असा आहे. तिसरा उद्देश—हल्लीं आपल्या ग्रहगणितामध्यें जो भेद दृग्गोचर झाला आहे, तो काढून टाकून नवीन ग्रंथ संस्कृत भाषेमध्यें किंवा महाराष्ट्र भाषेमध्यें करावेत असा आहे. याप्रमाणें मनांत आ-ल्याबरोबर ते सिद्धीस जावेत असा हेतु धरून कोल्हापूर, मलकापूर, इचलकरंजी, कुरुंदवाड, पुणें, मुंबई, वांई, तासगांव आणि विटे इतक्या ठिकाणीं जाऊन तेथील श्रीमान् व विद्वान् अशा लोकांस भेटून त्यांना आपले उद्देश कळविले. त्यावर श्रीमंत महाराज सरकार कोल्हापूर, श्रीमंत बाबासाहेब इचलकरंजीकर, श्रीमंत आबासाहेब विशाळगडकर, श्रीमंत माधवराव पंतअमात्य संस्थान बावडा, रावबहादूर बळवंतराव जोशी सरन्यायाधीश, रावसाहेब गणेश बळवंत जोशी, रावसाहेब विश्वनाथराव गोखले, श्रीमंत बापुसाहेब कागलकर, श्रीमंत बापुसाहेब कुरुंदवाडकर, नामदार बाळगंगाधर टिळक, श्रीमंत विनायकराव निळकंठ नातु, डा-

कर भाडारकर, प्रोफेसर आबाजी विष्णु काथवटे, रा. सा. व्यंकटराव द्रवीड; रा. सा. माधवराव कुमठेकर, रा. सा. हरीपंत आपटे, श्रीमंत बाबामहाराज, श्रीमंत बाबासाहेब सांगलीकर, जस्टिस महादेव गोविंद रानडे, डा. भालचंद्र, डा. गर्दे, डा. देशमूख, रा. सा. दाजी आबाजी खरे, रा. सा. गणेश कृष्ण देशमूख रा. सा. नारायण विष्णु बापट, शेट तुकाराम जावजी, रा. सा. रावजी भवानराव पावगी, रा. सा. सोहनी, रा. सा. आपटे इंजिनियर, रा. सा. वर्तक, रा. सा. ऋषि, डेक्कन कालेजस्थ विद्यार्थी इत्यादि मंडळींनीं *दरसाल उद्योग करण्याकरितां आश्रय देत जाऊं असें अभिवचन दिल्यामुळें अभीष्ट उद्योगास सुरवात करून हा एका वर्षांत केलेला उद्योग लोकांपुढें ठेवीत आहे.

आपल्या हिंदुस्थानामध्यें श्रीमद्भास्कराचार्य या नांवाचा एक नामांकित ज्योतिषी होऊन गेला. याचा जन्म शके १०३६ मध्यें झाला; यानें सिद्धांत शिरोमणी नामक ग्रंथ शके १०७२ सालीं तयार केला असें "रसगुणपूर्णमहीसमनृपशकसमयेऽभवन्ममोत्पत्तिः रसगुणवर्षेणमया सिद्धांत शिरोमणी रचितः"॥ याप्रमाणें त्यानें ग्रंथाच्या अखेरीस दिलेल्या पद्यावरून कळतें. यामध्यें लीलावति, बीजगणित, गणिताध्याय व गोलाध्याय असे चार भाग आहेत. यांपैकीं लीलावतीचें हें भाषांतर आहे. यामध्यें प्रथमतः कांहीं कोष्टकें सांगून अंकांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन, घनमूळ, व्यवहारी अपूर्णांक, गणितश्रेढी, भूमितिश्रेढी, क्षेत्रमापन, त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ, चतुरस्राचें क्षेत्रफळ, वर्तुळाचें क्षेत्रफळ, गोलपृष्ठफल, गोलघनफल, भुजज्यासाधन, पाक्षिकविपर्यय, सार्वांशिकविपर्यय इत्यादि

* टीपः—सर्व आश्रयदात्यांचा नांवें लवकरच प्रसिद्ध करणार आहें.



गणितशास्त्रीय अनेक विषयासंबंधानें उत्तम रीति दिल्या आहेत. त्यांचे श्लोक विद्यार्थ्यांनीं पाठ केले असतां विशेष उपयोग होणार आहे.

पूर्वी या भागाचें भाषांतर प्रसिद्ध झालें आहे. परंतु त्यामध्यें उपपत्ति दिली नसल्यामुळें सर्वांसच त्याचा फायदा मिळणें अशक्य आहे. कारण ज्यांना उपपत्ति समजावी अशी इच्छा आहे अशा लोकांस त्याचा बिलकूल उपयोग होत नाहीं, अशी उणीव दृष्टीस पडली ती दूर व्हावी म्हणून हा सोपपत्तिक भाषांतराचा प्रयत्न केला आहे यामध्यें मूळ श्लोक देऊन त्याचा तात्पर्यार्थ दिला आहे. सर्व उदाहरणें सोडवून दाखविलीं आहेत. व स्वतंत्र उपपत्तीही दिली आहे. बेरीज, वजाबाकी इत्यादि जे विषय नेहमीं प्रचारांत येणारे आहेत त्यांची उपपत्ति सुलभ असल्यामुळें मात्र ती येथें दिली नाहीं, या ग्रंथांतील उपपत्ति तयार करण्याचे कामीं लीलावतीवरील टीकाग्रंथ, पंडित बापूदेव यांच्या टिपण्या, टॉड हंटरचा थोरला अल्जिब्रा, त्रिकोणमिति, मूर्समेन्सुरेशन् आणि युक्लीड यांचा विशेष उपयोग झाला, यामध्यें श्रेढीव्यवहार, क्षेत्रव्यवहार आणि अंकपाश हीं प्रकरणें फारच उत्तम आहेत, तीं प्रत्येक विद्वान् गृहस्थानें वांचावींत अशी त्यास मी सूचना करितों. कारण तीं अवलोकनांत आलीं असतां आपल्यामध्यें असलेल्या गणितशास्त्राची प्रौढी सहजलक्ष्यांत येईल.

आचार्यांनीं या भागांत कुट्टक प्रकरण दिलें आहे. व तेंच प्रकरण दुसऱ्या भागांत म्हणजे बीजगणितांतही दिलें असल्यामुळें त्याचें भाषांतर व उपपत्तीही मी आपल्या बीजभाषांतरांत दिली आहे त्यांत पहावी.

याप्रमाणें केलेल्या उद्योगाचा लोकांनीं उपयोग करून घ्यावा असें मी इच्छितों.

यामध्यें जे दोष असतील त्या संबंधानें मजला विद्वान् लोकांनीं कळविल्यास त्याचा योग्य विचार करून पुढील आवृत्तींत सुधारणा करूं.

हें पुस्तक छापण्याच्या कामीं रावसाहेब हरी विनायक साठे यांनीं उत्तम मदत केल्यामुळें मी त्यांचा फार फार आभारी आहें. व साठे यांच्या औदार्याविषयीं जितकें वर्णन करावें तितकें थोडेंच होणार आहे. कारण त्यांचा व माझा बिलकूल परिचय नसतां त्यांनीं माझें लिहिलेलें पुस्तक वांचून पाहून केवळ पुस्तकांतील विषयांच्या योग्यतेचें अवलंबन करून छापण्याच्या खर्चाच्या वगैरे कामीं मदत केली हें त्यांस विशेष भूषणास्पद आहे.

हें पुस्तक छत्रेफंड कमिटीचे सेक्रेटरी रा. सा. गोविंद रावजी केळकर यांस दाखविलें. त्यांनीं कमिटीस विचारून २०० रुपये बक्षीस देऊं असें अभिवचन दिलें आहे. व ही गोष्ट वर्तमानपत्रांतूनही प्रसिद्ध झाली आहे. तेव्हां तें बक्षीस लवकरच मिळेल.

तसेंच रा. सा. बळवंत रामचंद्र सहस्रबुद्धे यांनींही सुमारें १५० रुपये बक्षीस देण्याचें वचन दिलें आहे. तेही आपलें वचन लवकरच शेवटास नेतील अशी आशा आहे.

हा ग्रंथ छापण्याच्या कामीं रा. आत्माराम अनंत आपटे यांणीं मला फार साह्य केले, करितां त्यांचाही मी फार आभारी आहें. मी फिरस्ता असल्याकारणानें छापखान्यांत वेळचे वेळेस प्रुफें व मूळप्रत देऊन काम उरकून घेणें माझ्यानें झालें नसतें. हें सर्व काम रा. आपटे यांनीं बिनबोभाट पार पाडलें.

ग्रंथकर्ता.

अनुक्रमणिका.

—:०:—

विषय.	पृष्ठ.	विषय.	पृष्ठ.
परिभाषाप्रकरण.	३	संक्रमणप्रकरण.	३१
संख्यास्थाननिर्णय.	४	वर्गकर्मप्रकरण.	३४
बेरीज.	४	गुणकर्मप्रकरण.	३७
वजाबाकी.	५	त्रैराशिक.	४२
गुणनप्रकार.	५	पंचराशिक.	४६
भागहार.	८	मिश्रव्यवहार.	५१
वर्ग.	८	श्रेढीव्यवहार.	७८
वर्गमूळ.	११	क्षेत्रव्यवहार.	१००
घन.	१२	खातव्यवहार.	१९०
घनमूळ.	१५	चितिव्यवहार.	१९९
भिन्नपरिकर्माष्टकप्रकरण.	१७	क्रकचव्यवहार.	२००
शून्यपरिकर्माष्टक.	२४	राशिव्यवहार.	२०३
व्यस्तविधिप्रकरण.	२६	छायाव्यवहार.	२०७
इष्टकर्मप्रकरण.	२७	अंकपाश.	२१८



॥ श्रीगणेशायनमः ॥

लीलावती.

श्लोक—प्रीतिं भक्तजनस्य यो जनयते विघ्नं विनिघ्नन् स्मृतस्तं वृंदारकवृंदवंदितपदं नत्वा मतंगाननं ॥ पाटीं सद्गणितस्य वच्मि चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटां संक्षिप्ताक्षरकोमलामलपदैर्लालित्यलीलावतीं ॥ १ ॥

अर्थ—जो सेवकजनाला प्रीति उत्पन्न करितो, व ज्याचें स्मरण केलें असतां विघ्नाचा नाश होतो, आणि ज्याच्या चरणास देवगण नमस्कार करितात अशा गजाननास नमस्कार करून चतुर लोकांस प्रीति देणारी व स्फुट अशी उत्तम लीलावती नामक गणिताची सरणी, संक्षिप्त मधुर व शुद्ध अशा पदांनीं सांगतों.

श्लोक—वराटकानां दशकद्वयं यत् सा काकिणी ताश्च पणश्चतस्रः ॥ ते षोडश द्रम्म इहावगम्यो द्रम्मैस्तथा षोडशभिश्च निष्कः ॥

अर्थ.

२० कवड्या	=	१	काकिणी	(दमडी)
४ काकिणी	=	१	पण	(पैसा)
१६ पण	=	१	द्रम्म	(पावली)
१६ द्रम्म	=	१	निष्क.	

श्लोक—तुल्या यवाभ्यां कथितात्र गुंजा वल्लस्त्रिगुंजो धरणं च तेऽष्टौ ॥ गद्याणकस्तद्द्वयमिंद्रतुल्यैर्वल्लैस्तथैको धटकः प्रदिष्टः ॥

अर्थ.

२	यव	=	१	गुंजा
३	गुंजा	=	१	वल्ल
८	वल्ल	=	१	धरण.
२	धरण	=	१	गद्याणक.
१४	वल्ल	=	१	धटक.

श्लोक—दशार्धगुंजं प्रवदंति माषं माषाह्वयैः षोडशभिश्च कर्षं ॥ कर्षैश्चतुर्भिश्च पलं तुलाज्ञाः कर्षं सुवर्णस्य सुवर्णसंज्ञं ॥

अर्थ.

५	गुंजा	=	१	माष.
१६	माष	=	१	कर्ष.
४	कर्ष	=	१	पल.

सोन्याच्या कर्षास सुवर्ण म्हणतात.

श्लोक—यवोदरै रंगुलमष्टसंख्यै र्हस्तोंऽगुलैः षड्गुणितैश्चतुर्भिः ॥ हस्तैश्चतुर्भिर्भवतीह दंडः क्रोशः सहस्रद्वितयेन तेषां ॥

अर्थ.

८	आडवे यव	=	१	अंगुल.
२४	अंगुलें	=	१	हस्त.
४	हस्त	=	१	दंड.
२०००	दंड	=	१	कोश.

श्लोक—स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन तथा कराणां दशकेन वंशः ॥ निवर्तनं विंशतिवंशसंख्यैः क्षेत्रं चतुर्भिश्च भुजै निबद्धं ॥

अर्थ.

४	कोश	=	१	योजन.
१०	हात	=	१	वंश.

ज्या चतुरस्रांतील प्रत्येक बाजू २० वंश म्हणजे २०० हात असते त्या क्षेत्रास निवर्तन असें म्हणतात.

श्लोक—हस्तोन्मितैर्विस्तृतिदैर्घ्यपिंडै यद्द्वादशास्रं घनहस्तसंज्ञं ॥ धान्यादिके यद्घनहस्तमानं शास्त्रोदिता मागधखारिका सा ॥

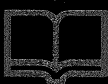
अर्थ—एक हात लांब, एक हात रुंद व एक हात उंच असें जें १२ कोंपऱ्यांचें क्षेत्र तयार होतें त्यास घनहस्त असें म्हणतात.

यासच धान्य मापण्याच्या संबंधानें मगध देशांत खारिका म्हणतात.

श्लोक—द्रोणस्तु खार्याः खलु षोडशांशः स्यादाढको द्रोणचतुर्थभागः ॥ प्रस्थश्चतुर्थांश इहाढकस्य प्रस्थांघ्रिराद्यैः कुडवः प्रदिष्टः ॥

अर्थ—खारीच्या सोळाव्या हिश्शास द्रोण, द्रोणाच्या चतुर्थांशास आढक, आढकाच्या चतुर्थांशास प्रस्थ, आणि प्रस्थाच्या चतुर्थांशास कुडव असें म्हणतात.

याप्रमाणें परिभाषा प्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.



श्लोक—लीलागललुलल्लोलकालव्यालविलासिने ॥ गणेशाय नमो नीलकमलामलकांतये ॥

अर्थ—आनंदानें गळ्यामध्यें लोळणारे, चंचल, व काळे अशा सर्पांनीं शोभणारा व नीलकमलाप्रमाणें ज्याची स्वच्छ-कांति आहे अशा गणपतीस नमस्कार असो.

श्लोक—एकदशशतसहस्रायुतलक्षप्रयुतकोटयः क्रमशः ॥ अर्बुदमब्जं खर्वं निखर्वमहापद्मशंकवस्तस्मात् ॥ जलधिश्चांत्यं मध्यं परार्धमिति दशगुणोत्तरं संज्ञाः ॥ संख्यायाः स्थानानां व्यवहारार्थं कृताः पूर्वैः ॥

अर्थ—एकादि दश गुणोत्तर संख्यास्थानाला क्रमानें व्यवहाराकरितां एक, दश, शत, सहस्र इत्यादि संज्ञा पूर्वाचार्यांनीं केलेल्या आहेत.

सूत्र—कार्यः क्रमादुत्क्रमतोथवांकयोगो यथास्थानकमंतरं वा ॥

अर्थ—बेरीज किंवा वजाबाकी करावयाची असल्यास ती क्रमानें किंवा उत्क्रमानें अंकस्थानाप्रमाणें करावी.

उद्देशक अथवा उदाहरण—अये बाले लीलावति मतिमति ब्रूहि सहितान् द्विपंचद्वात्रिंशत्रिनवतिशताष्टादशदश ॥ शतोपेतानेतानयुतवियुतांश्चापि वद मे यदि व्यक्ते युक्तिव्यवकलनमार्गेऽसि कुशला ॥

अर्थ—हे लीलावति तूं बेरीज व वजाबाकी ह्यांच्या रीतीमध्यें कुशल असशील तर २, ५, ३२, १९३, १८, १०, १०० या संख्यांची बेरीज सांग ? व ती बेरीज १०,००० तून वजा करून शेष किति राहिलें हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

यथोक्त क्रिया करून बेरीज ३६० हें उत्तर.

व १००००-३६०=९६४० हें उत्तर.

श्लोक—गुण्यांत्यमंकं गुणकेन हन्यादुत्सारितेनैव मुपांतिमादीन् ॥ गुण्यस्त्वधोधो गुणखंडतुल्यस्तैः खंडकैः संगुणितो युतोवा ॥ भक्तो गुणः शुध्यति येन तेन लब्ध्याच गुण्यो गुणितः फलंवा ॥ द्विधा भवेद्रूपविभाग एवं स्थानैः पृथग्वा गुणितः समेतः ॥ इष्टोनयुक्तेन गुणेन निघ्नोऽभी ष्टघ्नगुण्यान्वितवर्जितो वा ॥

अर्थ—गुणकानें गुण्यांतील अंतिमांकास (डावे कडील पहिल्या अंकास) गुणावें, नंतर उपांतिम आदीकरून अंकांस गुणून यथास्थानक बेरीज केली असतां गुणाकार होतो.

अथवा गुणकाचीं खंडें (विभाग) करून त्यांनीं पृथक् गुण्यास गुणून त्या गुणाकारांची बेरीज केली असतां गुणाकार होतो.

अथवा ज्या अंकानें गुणकास निःशेष भाग जाईल, त्यानें व त्याच्या भागाकारानें गुण्यास अनुक्रमें गुणिलें असतां गुणनफल (गुणाकार) येतें.

अथवा गुणकामध्यें जितकीं स्थानें असतील त्यांनीं पृथक् गुण्यास गुणून यथास्थानक बेरीज केली असतां गुणनफल येतें.

अथवा गुणकांतून इष्टांक वजा करून बाकीनें गुण्यास गुणून तो गुणाकार, इष्टांक व गुण्य यांच्या गुणाकारांत मिळविला असतां गुणनफल येते.

अथवा गुणकामध्यें इष्टांक मिळवून त्यानें गुण्यास गुणून त्यांतून इष्टांक व गुण्य यांचा गुणाकार वजा केला असतां गुणनफल येतें.

उदाहरण—बाले बालकुरंगलोलनयने लीलावति प्रोच्यतां पंचत्र्येकमिता दिवाकरगुणा अंकाः कतिस्युर्यदि ॥ रूपस्थानविभागखंडगुणने कल्पासि कल्याणिनि च्छिन्नास्तेन गुणेन तेच गुणिता जाताः कतिस्युर्वद ॥

अर्थ—हे लीलावति १३५ या संख्येस १२ नीं गुणून सर्व प्रकारांनीं गुणाकार किति येईल हें सांग ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

पहिल्या रीतीनें.

गुण्य १३५ व गुणक १२ आहे. त्यांतील गुण्याच्या अंतिमादि अंकांस गुणून.

  ३६
१२६०
१६२० गुणाकार हें उत्तर.

दुसऱ्या रीतीनें.

गुणकाचीं ४ व ८ अशीं दोन खंडें करून त्यांनीं गुण्यास गुणून बेरीज केली तर.

१३५ × ४ = ५४०
१३५ × ८ = १०८०
∴ ५४० + १०८० = १६२० गुणाकार हें उत्तर.

तिसऱ्या रीतीनें.

गुणक १२ यास ४ नें भागिलें असतां भागाकार ३ येतो. शिल्लक राहत नाहीं.

∴ १३५ × ४ = ५४०

५४० × ३ = १६२० गुणाकार हें उत्तर.

चवथ्या रीतीनें.

```
  १३५
   १२
 ────
  २७०
 १३५
 ────
 १६२०
```

गुणाकार हें उत्तर.

पांचव्या रीतीनें.

गुणक १२ तून इष्टांक ३ वजा करून ९ बाकी राहिली.

∴ १३५ × ९ = १२१५

१३५ × ३ = ४०५

∴ १२१५ + ४०५ = १६२० गुणाकार हें उत्तर.

सहाव्या रीतीनें.

गुणकांत इष्टांक ८ मिळवून २० आले.

∴ १३५ × २० = २७००

१३५ × ८ = १०८०

∴ २७०० − १०८० = १६२० हें उत्तर.

सूत्र—भाज्याद्धरः शुध्यति यद्गुणः स्याद्दत्यात्फलं तत्खलु भागहारे ॥ समेन केनाप्यपवर्त्य हारभाज्यौ भजेद्वा सति संभवे तु ॥

अर्थ—ज्या संख्येनें भाजकास गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून वजा जाईल त्या संख्येस भागाकार अथवा भजनफल म्हणतात.

भाज्य व भाजक यांस एखाद्या संख्येनें संक्षेप जाण्याचा संभव असल्यास तो देऊन क्रिया केली असतां उत्तर बरोबर येतें.

जसें भाज्य १६२० भाजक १२ आहे असें धरा. येथें भाजक १२ यास १३५ या संख्येनें गुणून आलेला गुणाकार भाज्यांतून निःशेष वजा जातो म्हणून १३५ हें भजनफल झालें. अथवा भाज्यभाजकांस ३ चा संक्षेप देऊन भाज्य ५४० व भाजक ४ झाला. येथेंही भाजकास १३५ नीं गुणिलें असतां तो भाज्यांतून निःशेष वजा जातो म्हणून १३५ हें भजनफल झालें.

सूत्र—समद्विघातः कृतिरुच्यतेथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ॥ स्वस्वोपरिष्टाच्च तथा परेकास्त्यक्त्वांत्य मुत्सार्य पुनश्च राशिं ॥ खंडद्वयस्याऽभिहति द्विनिघ्नी तत्खंडवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ॥ इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यादिष्टस्य वर्गेण समन्वितोवा ॥

अर्थ—दोन समान संख्यांच्या गुणाकारास वर्ग असें म्हणतात.

ज्या संख्येचा वर्ग करावयाचा असेल त्यांतील अंत्यांकाचा वर्ग मांडून अंत्यांकाच्या दुपटीनें अन्य अंकांस गुणून एकाधिकस्थानानें गुणाकार मांडून बेरीज करावी, नंतर अंतिमांक टाकून देऊन जी संख्या राहील तिला ही पूर्वोक्त क्रिया करून जी बेरीज

येईल ती पहिल्या बेरजेच्या वर एकाधिक स्थानानें मांडून बेरीज करावी. अशीच क्रिया आद्यंकापर्यंत करीत गेल्यानें इष्ट संख्येचा वर्ग येतो.

अथवा इष्ट संख्येचीं दोन खंडें करून त्या खंडांच्या वर्गांच्या बेरजेमध्यें खंडांच्या गुणाकाराची दुप्पट मिळविली असतां इष्ट संख्येचा वर्ग होतो.

अथवा ज्या संख्येचा वर्ग करावयाचा असेल त्यासंख्येंतून इष्टांक वजा करून व मिळवून ज्या संख्या होतील त्यांच्या गुणाकारामध्यें इष्टांकांचा वर्ग मिळविला असतां संख्येचा वर्ग होतो.

श्लोक—सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य ॥ पंचोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गं जानासि चे द्वर्ग विधानमार्गं ॥

अर्थ—९, १४, २९७, १०००५ या संख्यांचे वर्ग सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम २९७ संख्येचा वर्ग करूं. यांतील अंत्यांक २ याचा वर्ग ४ व अंतिमांकाची दुप्पट ४ हिनें बाकी ९७ अंकास गुणून एकाधिकस्थानानें मांडून बेरीज केली तर.

३२	
४६८	
७८८	बेरीज झाली.

नंतर अंतिमांक २ हा टाकून देऊन बाकी ९७ राहिली

यांतील अंत्यांक ९ याचा वर्ग ८१ व अंतिमांकाची दुप्पट १८ हिने ७ स गुणून एकाधिक स्थानाने मांडून

१२
८१६
९३६ बेरीज झाली

ही मागील बेरेजेवर एकाधिक स्थानाने मांडून बेरीज.

९३
७८८६
८८१६

नंतर अंतिमांक ९ टाकून ७ हा अंत्यांक झाला याचा वर्ग वरील बेरजेंत मिळवून.

४
८८१६९
८८२०९ वर्ग हें उत्तर.

आतां ९ या संख्येचा वर्ग दुसऱ्या रीतीनें कर

$$(९)^२ = (४+५)^२$$
$$= १६ + २५ + ४०$$
$$= ८१$$ वर्ग हें उत्तर

आतां १४ संख्येचा वर्ग तिसऱ्या रीतीनें करूं.

इष्ट = ६ धरून

$$(१४)^{२} = (१४-६)(१४+६)+(६)^{२}$$
$$= ८ \times २० + ३६$$
$$= १९६ \quad \text{वर्ग. हें उत्तर.}$$

याच पद्धतीनें अन्य संख्येंचे वर्ग करावेत.

सूत्र—त्यक्त्वाऽत्या द्विषमात् कृतिं द्विगुणये न्मूलं समे तद्धृते त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमा ल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ॥ पंक्त्यां पंक्तिहृते समेन्यविषमात् त्यक्त्वाप्तवर्गं फलं पंक्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पंक्ते र्दलंस्यात् पदं ॥

अर्थ— ज्या संख्येचें वर्गमूळ काढावयाचें असेल त्यांतील उजवीकडून डावीकडे प्रत्येक अंकावर क्रमानें विषम (उभीरेषा) व सम (आडवीरेषा) अशा खुणा करून त्यांतील अंत्य विषमां- तून ज्या संख्येचा वर्ग वजा जाईल तो वर्ग वजा करावा. आणि त्या वर्गाच्या मूळाची दुप्पट एका बाजूस मांडून ठेवावी. तिनें समास भागून आलेल्या भागाचा वर्ग, बाकीवर पुढील विषमांक घेऊन त्यांतून, वजा करावा. व भागाची दुप्पट, पूर्वी एका बाजूस मांडून ठेवलेल्या दुपटीमध्यें एकाधिक स्थानानें मिळवावी. नंतर त्या आलेल्या पंक्तीनें पुनः समास भागून आलेल्या भागाचा वर्ग, बाकीवर पुढील विषमांक घेऊन त्यांतून, वजा करावा. व भागाची दुप्पट, पूर्वी एका बाजूस मांडलेल्या पंक्तीमध्यें एकाधिक स्थानानें मिळवावी. याप्रमाणेंच अंक समाप्तीपर्यंत क्रिया करून जी पंक्ती होईल तिचें अर्ध केलें असतां वर्गमूळ येतें.

उदाहरण—मूलं चतुर्णांच तथा नवानां पूर्वं कृतानांच सखे कृतीनां ॥ पृथक् पृथक् वर्गपदानि विद्धि बुद्धे विवृद्धि र्यदि तेऽत्र जाता ॥

अर्थ—४, ९, ८१, १९६, ८८२०९, यांचीं वर्गमू

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पंक्ति.

२ × २ = ४

९ × २ = १८

९८

७ × २ = १४

९९४

याचें अर्ध २९७वर्गमूळ हें उत्तर.

संख्या.

८८२०

४

४) ४८ (९

३६

१२२

८१

९८) ४१०(

४०६

४९

४९

००

याच पद्धतीनें अन्य उत्तरें काढावीं.

सूत्रं—समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनों
ततोंत्यवर्गः ॥ आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्ग
तोऽथादिघनश्च सर्वे ॥ स्थानांतरत्वेन युता घनः
प्रकल्प्य तत् खंडयुगं ततोंत्यं ॥ एवं मुहुर्वर्गघन
वाद्यांकतोवा विधिरेष कार्यः ॥ खंडाभ्यां वाहतो
स्त्रिघ्नः खंडघनैक्ययुक् ॥ वर्गमूलघनस्वघ्नो वर्गराशेर्घनो

अर्थ—तीन समान संख्यांच्या गुणाकारास घन म्ह
ज्या संख्येचा घन करावयाचा असेल त्यांतील अंत्य

घन स्थापन करावा. त्याखालीं एकाधिकस्थानानें अंत्याचे वर्गास आद्यंकानें गुणून त्याची तिप्पट मांडावी. त्या खालीं आदिवर्गास अंत्यानें गुणून त्याची तिप्पट मांडावी. त्या खालीं आदीचा घन मांडून अंकस्थानाप्रमाणें बेरीज करावी. ही संख्येंतील अखेरच्या दोन अंकांचा घन होतो नंतर त्या दोन अंकांस अंत्य कल्पून व पुढील अंकास आदि कल्पून वर सांगितलेली क्रिया पुनः पुनः केली असतां सर्व संख्येचा घन होतो. हीच किया आद्यांकास अंत्यांक मानून जरी केली तरी घन येतो.

अथवा संख्येची दोन खंडें करून तीं खंडें व संख्या यांचे गुणाकाराची तिप्पट, खंडांच्या घनांच्या बेरजेंत मिळविली असतां घन होतो.

वर्गराश्यात्मक संख्येचा घन करावयाचा असल्यास त्या वर्गराशीचें वर्गमूळ काढून त्याचा घन करून त्या घनाचा वर्ग केला असतां वर्गराशीचा घन होतो.

उदाहरणम्—नवघनं त्रिघनस्य घनं तथा कथय पंचघनस्य घनं च मे ॥ घनपदं च ततोऽपि घनात्सखे यदि घनेऽस्ति घना भवती मतिः ॥

अर्थ—९, २७, १२९ या संख्यांचे घन काय होतात हें सांग? व जे घन होतील त्यांचीं घनमूळें पुढच्या सूत्रांत दिलेल्या रीतीनें काढ ?

उत्तरनिष्कशनक्रिया.

१२९ या संख्येचा घन करूं.

अंत्य १ याचा घन = १

अंत्य १ चा वर्ग × आदि २ × ३ = ६

२

आदि २ चा वर्ग ४ × अंत्य १ × ३ = १२

आदि २ चा घन = ८

१२ चा घन १७२८

आतां अंत्य १२ व आदि ५ धरून क्रिया पुनः करूं.

$१२^३$ = १७२८

$१२^२$ × ५ × ३ = २१६०

$५^२$ × १२ × ३ = ९००

$५^३$ = १२५

१२५ चा घन १९५३१२५

आतां २७ चा घन करूं.

यांत आद्यांकास अंत्यांक मानून पूर्वोक्त क्रिया केली तर,

$७^३$ = ३४३

$७^२$ × २ × ३ = २९४

$२^२$ × ७ × ३ = ८४

$२^३$ = ८

१९६८३ हा घन झाला.

आतां ९ चा घन दुसऱ्या रीतीनें करूं.

९ चीं ४ व ५ अशीं खंडें करून.

$४ \times ९ \times ९ = १८०$

$\therefore \; ४^{३} + ९^{३} + ३ \times १८० = ७२९.$

हा ९ चा घन झाला.

अथवा ९ हा वर्गराशी आहे. याचें मूळ ३ याचा घन २७ याचा वर्ग ७२९ हा ९ चा घन झाला.

सूत्रम्—आद्यं घनस्थानमथाऽघने द्वे पुनस्तथांत्याद्धनतो विशोध्यं ॥ घनं पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या त्रिघ्न्या तदाऽद्यं विभजेत्फलं तु ॥ पंक्त्यां न्यसेत्तत्कृतिमंत्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं त्यजेत् तत्प्रथमात्फलस्य घनं तदाद्याद्धनमूलमेवं पंक्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च ॥

अर्थ—ज्या संख्येचें घनमूळ काढावयाचें असेल तिच्या आद्यंकांस घनस्थान (उभीरेषा) दुसऱ्या व तिसऱ्या अंकास अघनस्थान (आडवीरेषा) अशा खुणा करून पुढेंही याच पद्धतीनें खुणा कराव्या. नंतर अंत्य घनस्थानांतून जी घनसंख्या वजा जात असेल ती वजा करावी. व त्या घन संख्येचें मूळ निराळें मांडावें. नंतर मूळाच्या वर्गाच्या तिपटीनें, बाकीवर अंत्यघनस्थानापुढील एक अंक घेऊन त्यास भागावें. भाग येईल तो, पंक्तीमध्यें म्हणजे पूर्वी निराळें मूळ मांडून ठेविलें आहे त्यापुढें मांडावा. नंतर भागाच्या वर्गास पंक्तींतील अंत्यांकानें गुणून तिप्पट करावी. ती तिप्पट बाकीवर पुढील एक अंक घेऊन त्यांतून वजा करावी. पुनः बाकीवर पुढील घनस्थानात्मक एक अंक घेऊन त्यांतून भागाचा घन वजा करावा. याच पद्धतीनें पुढेंही करून जी पंक्ति तयार होईल तेंच घनमूळ होतें.

असें.—१९६८३ या संख्येचें घनमूळ काढूं.

	संख्या पंक्ति (घनमूळ)
२³ = ८	१९६८३ (२७
२² × ३ = १२	८
७² × २ × ३ = २९४	११६
७³ = ३४३	८४
	३२८
	२९४
	३४३
	३४३
	०००

उदाहरण दुसरें.

	संख्या. मूळ.
१³ = १	१९५३१२५ (१२५
१² × ३ = ३	१
२² × १ × ३ = १२	०९
२³ = ८	६
१२² × ३ = ४३२	३५
५² × १२ × ३=९००	१२
५³ = १२५	२३३
	८
	२२५१
	२१६०

```
 ९१२
 ९००
─────
  १२५
  १२५
─────
  ०००
```

याप्रमाणें परिकर्माष्टकाचें (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन व घनमूळ, या आठ प्रकारांचें) भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

अथ भिन्नपरिकर्माष्टकप्रकरणम्.

व्यवहारी अपूर्णांकांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन, घनमूळ या आठ प्रकारांस भिन्नपरिकर्माष्टक असें म्हणतात.

सूत्रम्—अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ॥ मिथो हराभ्यामपवर्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियाऽत्र गुण्यौ ॥

अर्थ—वर अंश व खालीं छेद अशा प्रकारच्या भागजाती अपूर्णांकास समच्छेद रूप द्यावयाचें असल्यास, एकाच्या अंशच्छेदांस दुसऱ्याच्या छेदानें गुणावें व दुसऱ्याच्या अंशच्छेदांस पहिल्याच्या छेदानें गुणावें. दोहोंपेक्षां अधिक अपूर्णांक असल्यास याचप्रमाणें करीत गेल्यानें सर्व अपूर्णांकांस समच्छेद रूप प्राप्त होतें.

अपूर्णांकांचें छेदास समान अंकानें भागून जे भागाकार येतील

त्यांनीं परस्पर अपूर्णांकांचे अंशच्छेदांस गुणिल्यानेंही समच्छेद रूप प्राप्त होतें.

उदाहरणम्—रूपत्रयं पंचलवस्त्रिभागो योगार्थमेतान्वद तुल्यहारान् ॥ त्रिषष्टिभागश्च चतुर्दशांशः समच्छिदौ मित्र वियोजनार्थम् ॥

अर्थ— $\frac{३}{१}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{३}$ या अपूर्णांकास समच्छेद रूप देऊन बेरीज काय होईल? व $\frac{१}{६३}$, $\frac{१}{१४}$ यांस समच्छेद रूप देऊन वजाबाकी किति होईल हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{३}{१}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{३}$, या अपूर्णांकांपैकीं $\frac{३}{१}$ याच्या अंशच्छेदांस दुसऱ्यांच्या ५ व ३ या छेदांनीं गुणून $\frac{४५}{१५}$ आलें. तसेंच $\frac{१}{५}$ याच्या अंशच्छेदांस दुसऱ्यांच्या १ व ३ या छेदांनी गुणून $\frac{३}{१५}$ आले व $\frac{१}{३}$ याच्या अंशच्छेदांस १ व ५ या छेदांनीं गुणून $\frac{५}{१५}$ आलें. ह्मणून $\frac{४५}{१५}$, $\frac{३}{१५}$, $\frac{५}{१५}$ हे तिन्ही समच्छेद झाले.

$\therefore \frac{४५}{१५} + \frac{३}{१५} + \frac{५}{१५} = \frac{५३}{१५}$ हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्यें $\frac{१}{६३}$ व $\frac{१}{१४}$ यांच्या ६३ व १४ या छेदांस ७ नीं भागून भागाकार ९ व २ आले. यांनीं परस्पर अंशच्छेदांस गुणून $\frac{१}{६३} \times \frac{२}{२} = \frac{२}{१२६}$ व $\frac{१}{१४} \times \frac{९}{९} = \frac{९}{१२६}$ असे समच्छेद झाले.

$\therefore \frac{९}{१२६} - \frac{२}{१२६} = \frac{७}{१२६} = \frac{१}{१८}$ हें उत्तर.

सूत्रम्—लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात् ॥

अर्थ—ज्या ठिकाणीं अंशांचे अंश असतात अशा प्रभागजाती अपूर्णांकामध्यें अंशांनीं अंशांस गुणून जो गुणाकार येईल तो अंशस्थानीं, व छेदांनीं छेदांस गुणून जो गुणाकार येईल तो छेदस्थानीं मांडिला असतां भागजाती एक अपूर्णांक होतो.

उदाहरणम्—द्रम्मार्धत्रिलवद्वयस्य सुमते पादत्रयं यद्भवे-त्तत्पंचांशकषोडशांशचरणः संप्रार्थितेनार्थिने ॥ दत्तो येन वराटकाः कति कदर्येणार्पितास्तेन मे ब्रूहि त्वं यदि वेत्सि वत्स गणिते जातिं प्रभागाभिधाम् ॥

अर्थ—एका कृपण मनुष्यानें याचकाला १ द्रम्माचा $\frac{१}{२}$ चे $\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{१}{५}$ चे $\frac{१}{१६}$ चे $\frac{१}{४}$ इतकें द्रव्य दिलें. तर त्याच्या किति कवड्या होतील हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{१}{१} \times \frac{१}{२} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{१६} \times \frac{१}{४} = \frac{६}{७६८०} = \frac{१}{१२८०}$$

द्रम्म झाला.

$$\therefore \frac{१}{१२८०} \times \frac{२०}{१} \times \frac{४}{१} \times \frac{१६}{१} = \frac{१२८०}{१२८०} = १$$ कवडी हें उत्तर.

सूत्रम्—छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णमेकस्य भागा अधिकोनकाश्चेत् ॥ स्वांशाधिकोनः खलु यत्र तत्र भागानुबंधे च लवापवाहे ॥ तलस्थहारेण हरं निहन्यात्स्वांशाधिकोनेन तु तेन भागान् ॥

अर्थ—ज्या पूर्णांकामध्यें एकाचा कांहीं भाग अधिक असतो त्यांस भागानुबंध पूर्णांक म्हणतात. जसें, ९ + $\frac{१}{४}$ हा भागानुबंध पूर्णांक होय. हाच भागानुबंध पूर्णांक ९ $\frac{१}{४}$ असाही लिहितात. याच्या पूर्णांकास अपूर्णांकाच्या छेदानें गुणून त्यांत त्याचा अंश मिळविला असतां मुख्य अपूर्णांकाचें रूप येतें. ∴ वरील भागानुबंध ९$\frac{१}{४}$ पूर्णांक $\frac{३७}{४}$ असा अपूर्णांक झाला.

जो पूर्णांक एकाच्या कांहीं भागानें कमी असतो त्यास भागापवाहपूर्णांक म्हणतात. जसें ९ − $\frac{१}{४}$ हा भागापवाहपूर्णांक झाला. याच्या पूर्णांकास अपूर्णांकाच्या छेदानें गुणून त्यांतून त्याचा

अंश वजा करावा. असें केल्यानें खऱ्या अपूर्णांकाचें स्वरूप येतें. म्हणून वरील ९—$\frac{१}{४}$ यास $\frac{११}{४}$ हें अपूर्णांक स्वरूप आलें.

ज्यावेळीं राशि त्याच्या अंशानें म्हणजे स्वांशानें अधिक असतो त्यावेळीं त्यास स्वांशानुबंधअपूर्णांक, व उणा असतो त्यावेळीं त्यास स्वांशापवाहअपूर्णांक असें म्हणतात. अशा वेळीं मूळचा राशि अपूर्णांकात्मक वर मांडून त्याचे खालीं त्याचा अंश मांडावा. असे दोन अपूर्णांक एकाखालीं एक होतील. नंतर खालच्याचे छेदांत त्याचाच अंश, अधिक असल्यास मिळवावा व उणा असल्यास वजा करावा. नंतर आलेल्या संख्येनें वरच्याच्या अंशास गुणून आलेला गुणाकार अंशाचे जागीं मांडावा. व खालच्याच्या छेदानें वरच्याच्या छेदास गुणून आलेला गुणाकार छेदस्थानीं मांडावा. म्हणजे एक अपूर्णांक होईल.

उदाहरणम्-सांघ्रिद्वयं त्रयं त्र्यंघ्रि कीदृग्ब्रूहि सवर्णितम्॥ जानास्यंशानुबंधं चेत्तथा भागापवाहनम् ॥ अंघ्रिः स्वत्र्यंशयुक्तः सनिजदलयुतः कीदृशः कीदृशौ द्वौ त्र्यंशौ स्वाष्टांशहीनौ तदनुच रहितौ तौ त्रिभिः सप्तभागैः ॥ अर्धं स्वाष्टांशहीनं नवभिरथ युतं सप्तमांशैः स्वकीयैः कीदृक् स्याद्ब्रूहि वेत्सि त्वमिह यदि सखेऽशानुऽबंधापवाहौ ॥

अर्थ—उदाहरण पहिलें—२$\frac{१}{४}$ या भागानुबंध अपूर्णांकास सरळ रूप देऊन कसा होतो ?

उ० २ रें.— ३ $\frac{१}{४}$ या भागापवाह अपूर्णांकास सरळरूप देऊन कसा होतो हें सांग ?

उ० ३ रें.— $\frac{१}{४}$ त त्याचाच $\frac{१}{३}$ मिळवून जी संख्या होईल तींत तिचा $\frac{१}{२}$ मिळविला तर काय होईल, हें सांग ?

उ० ४ थें.— $\frac{२}{३}$ तून त्यांचाच $\frac{१}{८}$ वजा करून जी संख्या होईल तींतून तिचे $\frac{३}{७}$ वजा केले तर काय होईल ?

उ० ५ वें.—$\frac{१}{२}$ तून त्याचाच $\frac{१}{८}$ वजा करून जी संख्या होईल तीमध्यें तिचे $\frac{९}{७}$ मिळविले तर काय होईल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$२\frac{१}{४} = \frac{४ \times २ + १}{४} = \frac{९}{४}$ हें उत्तर.

$३ - \frac{१}{४} = \frac{४ \times ३ - १}{४} = \frac{११}{४}$ हें उत्तर.

$$\left\{ \begin{matrix} \text{मूळराशि } \frac{१}{४} + \\ \text{त्याचाच } \frac{१}{३} \end{matrix} \right\} = \frac{(३ + १) \times १}{४ \times ३} = \frac{१}{३}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{पुनः } \frac{१}{३} \\ + \text{ त्याचा } \frac{१}{२} \end{matrix} \right\} = \frac{(२ + १) \times १}{३ \times २} = \frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{मूळ राशी } \frac{२}{३} \\ - \text{ त्याचा } \frac{१}{८} \end{matrix} \right\} = \frac{(८ - १) \times २}{८ \times ३} = \frac{७}{१२}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{पुनः } \frac{७}{१२} \\ - \text{ त्याचे } \frac{३}{७} \end{matrix} \right\} = \frac{(७ - ३) \times ७}{१२ \times ७} = \frac{१}{३} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{मूळ राशी } \frac{१}{२} \\ - \text{ त्याचा } \frac{१}{८} \end{matrix} \right\} = \frac{(८ - १) \times १}{८ \times २} = \frac{७}{१६}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{पुनः } \frac{७}{१६} \\ + \text{ त्याचा } \frac{९}{७} \end{matrix} \right\} = \frac{(९ + ७) \times ७}{१६ \times ७} = १ \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—योगोऽतरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णांकांची बेरीज किंवा वजावाकी करणें झाल्यास, ज्या पूर्णांकास छेद नाहीं त्यास १ छेद कल्पना

करून समच्छेद करावा नंतर अंशांची बेरीज किंवा वजाबाकी करून अंशस्थानीं मांडावी व छेदस्थानीं समच्छेद लिहावा.

उदाहरणम्—पंचांशपादत्रिलवार्धषष्ठानेकीकृतान्ब्रूहि सखे ममैतान् ॥ एभिश्च भागैरथ वर्जितानां किं स्यात्त्र्याणां कथयाऽऽशु शेषम् ॥

अर्थ—$\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$ व $\frac{१}{६}$ यांची बेरीज सांग ! व आलेली बेरीज ३ तून वजा करून बाकी सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{१}{५}+\frac{१}{४}+\frac{१}{३}+\frac{१}{२}+\frac{१}{६}=\frac{१२}{६०}+\frac{१५}{६०}+\frac{२०}{६०}+\frac{३०}{६०}+\frac{१०}{६०}=\frac{२९}{२०}$ बेरीज हें उत्तर.

$\frac{३}{१}-\frac{२९}{२०}=\frac{६०-२९}{२०}=\frac{३१}{२०}$ बाकी हें उत्तर.

सूत्रम्—अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णांकांचा गुणाकार करावयाचा असल्यास अंशांचा गुणाकार करून तो अंशस्थानीं मांडावा व छेदांचा गुणाकार करून तो छेदस्थानीं मांडावा म्हणजे गुणाकार होतो.

उदाहरणम्—सत्र्यंशरूपद्वितयेन निघ्नं ससप्तमांशद्वितयं भवेत्किम् ॥ अर्धं त्रिभागेण हतं च विद्धि दक्षोऽसि भिन्ने गुणनाविधौ चेत् ॥

अर्थ—$२\frac{१}{३}$ नें $२\frac{१}{७}$ ला, आणि $\frac{१}{३}$ नें $\frac{१}{२}$ ला गुणून गुणाकार काय होतील हे सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$२\frac{१}{३} \times २\frac{१}{७} = \frac{२\times३+१}{३} \times \frac{७\times२+१}{७} = \frac{७}{३} \times \frac{१५}{७} = ५$ गुणाकार हें उत्तर.

$\frac{१}{३} \times \frac{१}{२} = \frac{१}{६}$ गुणाकार हें उत्तर.

सूत्रम्—छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य शेषः कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णांकांचा भागाकार करावयाचा असल्यास, भाजकाचे छेदास अंशस्थानीं मांडून, व अंशास छेदस्थानीं मांडून गुणाकार करावा म्हणजे भागाकार होतो.

उदाहरणम्—सत्र्यंशरूपद्वितयेन पंच त्र्यंशेन षष्ठं वद मे विभज्य ॥ दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिश्चेदस्ति ते भिन्नहृतौ समर्था ॥

अर्थ—$२\frac{१}{३}$ नें ५ स, आणि $\frac{१}{३}$ नें $\frac{१}{६}$ स भागून भागाकार काय होतील हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$५ \div २\frac{१}{३} = ५ \div \frac{३\times२+१}{३} = ५ \div \frac{७}{३} = \frac{५}{१} \times \frac{३}{७} = \frac{१५}{७}$ भागाकार हें उत्तर.

$\frac{१}{६} \div \frac{१}{३} = \frac{१}{६} \times \frac{३}{१} = \frac{१}{२}$ भागाकार हें उत्तर.

सूत्रम्—वर्गे कृती घनविधौ तु घनौ विधेयौ ॥ हारांशयो रथपदे च पदप्रसिद्ध्यै ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णांकाचा वर्ग, घन, वर्गमूळ, व घनमूळ काढणें झाल्यास अंशाचे वर्गादिक करून अंशस्थानीं मांडावें; व छेदाचे वर्गादिक करून छेदस्थानीं मांडावें म्हणजे वर्गादि होतें,

उदाहरणम्—सार्धत्रयाणां कथयाऽऽशु वर्गं वर्गात्ततो व र्गपदं च मित्र ॥ घनं च मूलं च घनात्ततोऽपि जानासिचे द्वर्गघनौ विभिन्नौ ॥

अर्थ—$३\frac{१}{२}$ चा वर्ग, आणि जो वर्ग होईल त्याचें वर्गमूळ, तसेंच $३\frac{१}{२}$ चा घन, व जो घन होईल त्याचें घनमूळ काय होईल तें मला सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\left(३\frac{१}{२}\right)^२ = \left(\frac{३\times२+१}{२}\right)^२ = \left(\frac{७}{२}\right)^२ = \frac{४९}{४}$ वर्ग हें उत्तर.

$\sqrt{\frac{४९}{४}} = \frac{७}{२}$ वर्गमूळ हें उत्तर.

$\left(३\frac{१}{२}\right)^३ = \left(\frac{७}{२}\right)^३ = \frac{७\times७\times७}{२\times२\times२} = \frac{३४३}{८}$ घन हें उत्तर.

$\sqrt[३]{\frac{३४३}{८}} = \frac{७}{२}$ घनमूळ हें उत्तर.

याप्रमाणें भिन्नपरिकर्माष्टकाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

अथ शून्यपरिकर्माष्टकप्रकरणम्.

सूत्रम्—योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं खभाजितो राशिः ॥ खहरः स्यात्खगुणः खं खगुणश्चिंत्यश्च शेष-विधौ ॥ शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत्पुनस्तदा राशिः ॥ अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितः खयुतः ॥

अर्थ—शून्यामध्यें कोणतीही संख्या मिळविली असतां त्या संख्येइतकीच बेरीज होते. शून्याचा वर्ग, वर्गमूळ, घन, व

घनमूळ हीं सर्व शून्यच होतात. शून्यानें कोणत्याही संख्येस भागिलें तर $\frac{\text{संख्या}}{\text{०}}$ अशी किंमत समजावी म्हणजे ती अनंत आहे असें जाणावें. शून्यानें कोणत्याही संख्येस गुणिलें तर गुणाकार शून्य येतो. परंतु कोणत्याही संख्येस शून्य गुणक असून पुढें त्याच संख्येस शून्य भाजक होण्याचा संभव असल्यास त्या संख्येस विकार होत नाहीं म्हणजे जशीची तशीच संख्या राहते. तसेंच कोणत्याही संख्येमध्यें शून्य मिळविलें किंवा वजा केलें असतां त्या संख्येस विकार होत नाहीं.

उदाहरणम्—खं पंचयुग्भवति किं वद खस्य वर्गं मूलं घनं घनपदं खगुणाश्च पंच ॥ खेनोद्धृता दश च कः खगुणे निजार्धयुक्तस्त्रिभिश्च गुणितः खहृतस्त्रिषष्टिः ॥

अर्थ—शून्यांत ५ मिळविले तर बेरीज काय? शून्याचा वर्ग, वर्गमूळ, घन, व घनमूळ काय? शून्यानें ५ स गुणिलें तर गुणाकार काय? शून्यानें १० स भागिलें तर भागाकार काय? आणि एका संख्येला शून्यानें गुणून त्यांत त्या संख्येचें अर्ध मिळविलें नंतर त्यास ३ नीं गुणून शून्यानें भागिलें असतां ६३ येतात तर ती संख्या कोणती तें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\left.\begin{array}{l} \text{०}+\text{५}=\text{५} \\ (\text{०})^{\text{२}}=\text{०} \\ (\text{०})^{\text{३}}=\text{०} \\ \sqrt{\text{०}}=\text{०} \\ \sqrt[\text{३}]{\text{०}}=\text{०} \\ \text{५}\times\text{०}=\text{०} \\ \frac{\text{१०}}{\text{०}}=\text{अनंत}\ \infty \end{array}\right\}\text{हीं उत्तरें}$$



$$\frac{\left(\text{अज्ञातराशि}\times \text{०} + \frac{\text{अज्ञातराशि}\times \text{०}}{\text{२}}\right)^{\text{३}}}{\text{०}} = \text{६३}$$

$$\therefore \frac{\text{६अज्ञातराशि}\times \text{०} + \text{३ अज्ञातराशि}\times \text{०}}{\text{२}\times \text{०}} = \text{६३}$$

शून्याचा संक्षेप देऊन

९ अज्ञातराशि = ६३ × २

∴ अज्ञातराशि = १४ संख्या हें उत्तर.

व्यस्तविधिप्रकरणम्.

सूत्रम्—छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम् ॥ ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्याद्दृश्ये राशिप्रसिद्धये ॥ अथ स्वांशाधिकोने तु लवाढ्योनो हरो हरः ॥ अंशस्त्वविकृतस्तत्र विलोमे शेषमुक्तवत् ॥

अर्थ—दृश्य संख्येस उलट क्रमानें भाजक असल्यास गुणक, गुणक असल्यास भाजक, वर्ग असल्यास वर्गमूळ, वर्गमूळ असल्यास वर्ग, ऋण असल्यास धन, धन असल्यास ऋण करावें म्हणजे मूळ संख्या येते. तसेच कोणत्याही संख्येचा अंश मिळविण्यास किंवा वजा करण्यास सांगितला असतां त्याचे छेदांत त्यांचा अंश मिळवून किंवा वजा करून जें येईल तो स्पष्ट छेद कल्पून अंश तोच समजावा. नंतर पूर्वोक्त व्यस्तक्रिया करावी.

उदाहरणम्—यस्त्रिघ्नस्त्रिभिरन्वितः स्वचरणैर्भक्तस्ततः सप्तभिः स्वत्र्यंशेन विवर्जितः स्वगुणितो हीनो द्विपंचा-

श्रुता ॥ तन्मूलेऽष्टयुते हृते च दशभिर्जातं द्वयं ब्रूहि तं राशिं-
वेत्सि हि चंचलाक्षि विमलां बाले विलोमक्रियाम् ॥

अर्थ—जिला ३ नीं गुणून त्यांत त्याचे $\frac{३}{४}$ मिळवून जी बेरीज येईल तिला ७ नीं भागून भागाकारांतून त्याचा $\frac{१}{३}$ वजा केला. नंतर शेषाचा वर्ग करून त्यांतून ५२ वजा केले; बाकीचें वर्गमूळ काढून त्यांत ८ मिळवून १० नीं भागिलें तेव्हां भागाकार २ आला तर ती संख्या कोणती हें सांग ;

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या उदाहरणांत अखेरीस दृश्य संख्या २ ही आहे. तिला सूत्रांत सांगितल्यावरून उलट क्रिया करूं. १० भाजक आहे म्हणून २×१० $= २०$ झाले. ८ अधिक आहेत म्हणून $२० - ८ = १२$ याचा वर्ग १४४ यांत ५२ मिळवून १९६ याचें वर्गमूळ १४ यांत $१४ \times \frac{१}{३-१}$ म्हणजे ७ मिळवून २१ यास ७ नीं गुणून १४७ यांतून $१४७ \times \frac{३}{४+३}$ म्हणजे ६३ वजा करून ८४ यास ३ नें भागून २८ हें उत्तर,

---

इष्टकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—उद्देशकालापवदिष्टराशिः क्षुण्णो हृतोंऽशै रहितो युतो वा ॥ इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं राशिर्भवेत्प्रो-क्तमितीष्टकर्म ॥

अर्थ—प्रथम इष्टसंख्या कल्पना करून त्या इष्टसंख्येस उदाहरणांत सांगितल्याप्रमाणें क्रिया करावी म्हणजे गुणावयास सांगितलें असल्यास गुणावें. भागावयास सांगितलें असल्यास भागावें. मिळवावयास किंवा वजा करावयास सांगितल्यास तसें करावें. याप्रमाणें क्रिया करून जें फल येईल त्यानें, दृश्यसं-

ख्येस इष्टसंख्येनें गुणून आलेल्या गुणाकारास भागावें. म्हणजे जो भागाकार येईल ती मूळ संख्या येईल.

उदाहरणम्—पंचघ्नः स्वत्रिभागोनो दशभक्तः समन्वितः ॥ राशित्र्यंशार्धपादैः स्यात्को राशिर्व्द्यूनसप्ततिः ॥

अर्थ—ज्या संख्येस ५ नीं गुणून त्याचा $\frac{1}{3}$ वजा करून बाकीस १० नीं भागून त्यांत मूळ संख्येचा $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{4}$ हे मिळविले असतां ६८ होतात तर ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या ३ धरून तिला ५ नीं गुणून १५ यांतून १५ × $\frac{1}{3}$ वजा करून १० या बाकीस १० नीं भागून भागाकार १ यांत, इष्टसंख्या ३ हिचा $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, व $\frac{1}{4}$ मिळवून $\frac{17}{4}$ आले, त्यानें इष्टसंख्या ३ व दृश्यसंख्या ६८ यांच्या गुणाकारा २०४ स भागिलें तेव्हां ४८ ही मूळसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—यूथार्धं सत्रिभागं वनविवरगतं कुंजराणां च दृष्टं षड्भागश्चैव नद्यां पिबति च सलिलं सप्तमांशेन मिश्रः ॥ पद्मिन्यां चाष्टमांशः स्वनवमसहितः क्रीडते सानुरागो नागेंद्रो हस्विनीभिस्तिसृभिरनुगतः का भवेद्यूथसंख्या ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं हस्तिसमुदाय होता. त्यापैकीं अर्ध व अर्धाचे $\frac{1}{3}$ इतके हस्ति अरण्यांतील गुहेंत गेले; $\frac{1}{6}$ व $\frac{1}{6} \times \frac{1}{7}$ इतके हस्ति नदींत पाणि प्यावयाकरितां गेले; व $\frac{1}{8}$ आणि $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9}$ इतके हस्ति पद्मिनींचे ठाईं क्रीडा करीत होते. आणि एक हस्ति ३ हस्तीनीं बरोबर क्रीडा करीत जात आहे, तर त्या समुदायांत हस्ति किती होते ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून

$१-(\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\times\frac{१}{३}+\frac{१}{६}+\frac{१}{६}\times\frac{१}{७}+\frac{१}{४२}+\frac{१}{४२}\times\frac{१}{९}) = १ -(\frac{२}{३}+\frac{४}{२१}+\frac{५}{३७८}) = \frac{१}{२५२}$ ∴ दृश्यसंख्या ४ × इष्टसंख्या १ ÷ $\frac{१}{२५२}$ = १००८ हस्ति हें उत्तर.

उदाहरणम्—अमलकमलराशेस्त्र्यंशपंचांशषष्ठैस्त्रिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या ॥ गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपद्मैः सकलकमलसंख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं कमलसमूह होता. त्यांपैकीं $\frac{१}{३}$ शिवास वाहिलीं, $\frac{१}{५}$ कमलें विष्णूस वाहिलीं, $\frac{१}{६}$ सूर्यास वाहिलीं, व $\frac{१}{४}$ सरस्वतीस वाहिलीं. नंतर बाकी ६ कमलें शिल्लक राहिलेलीं गुरुचरणीं अर्पण केलीं तर त्या समूहामध्यें कमलें किती होतीं हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें इष्ट संख्या १ धरून

$१-(\frac{१}{३}+\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{४}) = १-\frac{१९}{२०} = \frac{१}{२०}$

∴ दृश्यसंख्या ६ × इष्टसंख्या १ ÷ $\frac{१}{२०}$ = १२० कमलें हें उत्तर.

उदाहरणम्—हारस्तारस्तरुण्या निधुवनकलहे मौक्तिकानां विशीर्णो भूमौ यातस्त्रिभागः शयनतलगतः पंचमांशोऽस्य दृष्टः ॥ प्राप्तः षष्ठः सुकेश्या गणकदशमकः संगृहीतः प्रियेण दृष्टं षट्कं च सूत्रे कथय कतिपयैर्मौक्तिकैरेष हारः ॥

अर्थ—सुरत युद्धामध्यें तरुणीच्या गळ्यांतील मौक्तिकाचा हार तुटला, त्यांतील $\frac{१}{३}$ मोती भूमीवर पडले, $\frac{१}{५}$ मोती शय्येवर पडले, $\frac{१}{६}$ मोती तरुणीनें गोळा केले, $\frac{१}{१०}$ मोती पतीनें गोळा

केले, बाकी ६ मोती हाराच्या सूत्रांतच राहिले, तर त्या हारामध्यें मोती किती होते ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून

$$१-(\frac{१}{३}+\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{१०})=\frac{१}{५}$$

∴ दृश्यसंख्या ६ × इष्टसंख्या १ ÷ $\frac{१}{५}$ = ३० मौक्तिकांचा हार हें उत्तर.

उदाहरणम्—स्वार्धं प्रादात्प्रयागे नवलवयुगुलं योऽव-शेषाच्च काश्यां शेषांघ्रिं शुल्कहेतोः पथि दशमलवान्षट्च शेषाद्गयायाम् ॥ शिष्टा निष्कत्रिषष्टिर्निजगृहमनया तीर्थपांथः प्रयातस्तस्य द्रव्यप्रमाणं वद यदि भवता शेषजातिः श्रुताऽस्ति ॥

अर्थ—एका पांथस्थाजवळ कांहीं द्रव्य होतें. त्यांपैकीं त्यानें निम्में द्रव्य प्रयागांतील ब्राह्मणास दिलें, बाकी जें द्रव्य राहिलें त्याचे $\frac{२}{९}$ काशीमध्यें खर्च केलें, बाकीचें $\frac{१}{४}$ द्रव्य जकातीला दिलें, बाकीचे $\frac{६}{१०}$ द्रव्य गयेमध्यें खर्च केलें. शेवटी त्याजवळ ६३ रुपये शिल्लक राहिले तर त्याचे जवळ किती द्रव्य होतें हें सांग ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून $१-\frac{१}{२}=\frac{१}{२}$ ही प्रयागांतील शिल्लक.

∴ $\frac{१}{२}\times\frac{२}{९}=\frac{१}{९}$ काशींत खर्च केले तेव्हां $\frac{१}{२}-\frac{१}{९}=\frac{७}{१८}$ शिल्लक.

∴ $\frac{७}{१८}\times\frac{१}{४}=\frac{७}{७२}$ जकातीस दिले. $\frac{७}{१८}-\frac{७}{७२}=\frac{७}{२४}$ शिल्लक राहिली.

∴ $\frac{७}{२४}\times\frac{६}{१०}=\frac{७}{४०}$ गयेंत खर्च झाला. तेव्हां $\frac{७}{२४}-\frac{७}{४०}=\frac{३५}{१२०}-\frac{२१}{१२०}=\frac{७}{६०}$ ही अखेरची शिल्लक झाली.

∴ दृश्यसंख्या ६३ × इष्ट संख्या १ ÷ $\frac{७}{६०}$ = ५४० रुपये हें उत्तर.

उदाहरणम्—पंचांशोऽलिकुलात्कदंबमगमत्र्यंशः शिलींध्रं तयोर्विश्लेषस्त्रिगुणो मृगाक्षि कुटजं दोलायमानोऽपरः ॥ कांते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रियादूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृंगोऽलिसंख्यां वद ॥

अर्थ—एक भ्रमरसमूह होता. त्यांतील $\frac{१}{५}$ भ्रमर कदंबाचे झाडावर गेले, $\frac{१}{३}$ भ्रमर शिलींध्रवृक्षावर गेले, आणि ($\frac{१}{३} - \frac{१}{५}$) × ३ भ्रमर कुड्याच्या झाडावर गेले. व १ भ्रमर तेथें होता तर त्या समूहांत भ्रमर किती होते हें सांग ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून $१ - (\frac{१}{५} + \frac{१}{३} + (\frac{१}{३} - \frac{१}{५}) \times ३) = १ - \frac{१४}{१५} = \frac{१}{१५}$ ∴ दृश्यसंख्या १ × इष्टसंख्या $१ \div \frac{१}{१५} = १५$ भ्रमर हें उत्तर.

विषमकर्म, अथवा संक्रमणप्रकरणम्.

सूत्रम्—योगोऽतरेणोनयुतोऽर्धितस्तौ राशी स्मृतं संक्रमणाख्यमेतत् ॥

अर्थ—दोन संख्यांची बेरीज व वजाबाकी दिली असतां त्यांपासून त्या दोन संख्या काढणें झाल्यास, त्या दोन संख्यांच्या बेरजेंत त्यांची वजाबाकी ऋण व धन करून त्यांचीं अर्धे केलीं असतां प्रथक् त्या दोन्ही संख्या येतात. या गणितास संक्रमण म्हणतात.

उपपत्ति.

अ = प्रथम संख्या

ब = द्वितीय संख्या धरून

$$\left.\begin{array}{l} अ + ब = प \\ अ - ब = क \end{array}\right\}$$ हीं दोन्हीं दिलीं आहेत.

या दोन समीकरणांची बेरीज करून

$$२ अ = प + क$$

$$\therefore अ = \frac{प + क}{२}$$

त्याच दोन समीकरणांच्या वजाबाकीवरून

$$२ ब = प - क$$

$$\therefore ब = \frac{प - क}{२}$$

∴ इष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—ययोर्योगः शतंसैकं वियोगः पंचविंशतिः ॥ तौ राशी वद मे वत्स वेत्सि संक्रमणं यदि ॥

अर्थ—ज्यांची बेरीज १०१ व वजाबाकी २५ आहे त्या दोन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१०१ − २५ = ७६ याचें अर्ध ३८

१०१ + २५ = १२६ याचें अर्ध ६३

∴ ३८ व ६३ ह्या संख्या हें उत्तर.

सूत्रम्—वर्गांतरं राशिवियोगभक्तं योग स्ततः प्रोक्तवदेव राशी ॥

अर्थ—दोन संख्यांचें अंतर व त्याच दोन संख्यांच्या वर्गांचें अंतर दिलें असतां, त्यांपासून त्या दोन संख्या काढणें

झाल्यास, त्या दोन संख्यांच्या अंतरानें वर्गांतरास भागावें म्हणजे त्या दोन संख्यांची बेरीज येते. नंतर अंतर व बेरीज यांवरून मागच्या संक्रमण सूत्रानें त्या दोन संख्या काढतां येतील. या गणितास वर्गसंक्रमण असें म्हणतात.

उपपत्ति.

अ = एक संख्या आणि

ब = दुसरी संख्या धरून

$अ^2 - ब^2 = (अ + ब)(अ - ब)$

$\therefore अ + ब = \frac{अ^2 - ब^2}{अ - ब}$

$\therefore योग = \frac{वर्गांतर}{राश्यंतर}$

∴ इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

उदाहरणम्---राश्योर्ययोर्वियोगोऽष्टौ तत्कृत्योश्च चतुःशती ॥ विवरं वद तौ राशी शीघ्रं गणितकोविद ॥

अर्थ---ज्या दोन संख्यांचें अंतर ८ आहे व त्यांच्या वर्गांचें अंतर ४०० आहे. तर त्या दोन संख्या कोणत्या ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

वर्गांतर ४०० यास ८ नें भागून ५० ही त्या दोन संख्याची बेरीज झाली म्हणून

$\left.\begin{array}{l} \frac{५० - ८}{२} = २१ \\ \frac{५० + ८}{२} = २९ \end{array}\right\}$ ह्या दोन संख्या हें उत्तर.

याप्रमाणें संक्रमणप्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

वर्गकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—इष्टकृति रष्टगुणिता व्येका दलिता विभाजितेष्टेन ॥ एकः स्यादस्य कृतिर्दलिता सैका परो राशिः॥ रूपंद्विगुणेष्टहृतं सेष्टं प्रथमोऽथवापरो रूपम् ॥ कृतियुतिवियुती व्येके वर्गौ स्यातां ययो राश्योः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व वजाबाकी या प्रत्येकींतून १ वजा केला असतां ज्या बाक्या राहतात त्या वर्गराशी होतात अशा दोन संख्या काढण्याची रीति पहिली—प्रथम इष्टसंख्या कल्पून तिच्या वर्गास ८ नीं गुणून १ वजा करावा, नंतर जी बाकी राहील तिच्या अर्धास इष्टसंख्येनें भागावें म्हणजे पहिली संख्या येते. आणि या पहिल्या संख्येच्या वर्गाचे अर्धांत १ मिळविला असतां दुसरी संख्या येते.

दुसरी रीति—इष्टसंख्येच्या दुप्पटीनें १ या संख्येस भागून त्यांत इष्टसंख्या मिळविली असतां पहिली संख्या होते. व दुसरी संख्या १ हीच समजावी.

उदाहरणम्—राश्योर्ययोः कृतिवियोगयुती निरेके मूलप्रदे प्रवद तौ मम मित्र यत्र ॥ क्लिश्यंति बीजगणिते पटवोऽपि मूढाः षोढोक्तबीजगणितं परिभावयंतः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व वजाबाकी या प्रत्येकींतून १ वजा केला असतां ज्या बाक्या राहतात त्या वर्गराशि असतात अशा दोन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या १/२ धरून याचा वर्ग १/४ यास ८ नीं गुणून २ यांतून १

वजा करून शेष १ याचे अर्ध $\frac{१}{२}$ यास इष्ट $\frac{१}{२}$ नें भागून १ हा प्रथमराशि झाला.

या प्रथमराशीचा वर्ग १ याचें अर्ध $\frac{१}{२}$ यांत १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा द्वितीयराशि झाला. ∴ १ व $\frac{३}{२}$ संख्या हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या रीतीनें सोडवूं. इष्ट १ याच्या दुपटीनें १ स भागून $\frac{१}{२}$ यांत इष्ट १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा प्रथम राशि झाला. व द्वितीय राशि १ च समजावा. ∴ $\frac{३}{२}$ व १ संख्या हें उत्तर. या प्रमाणें इष्टवशेकरून अनंत उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

क्ष = प्रथमराशि आणि य + १ = द्वितीयराशि धरून प्रथमराशिवर्ग = $क्ष^२$ आणि द्वितीयराशिवर्ग = $य^२ + २ य + १$ येथें $क्ष^२ = २ य$ जर मानिलें तर वर्गांतरांतून १ वजा करून वर्गराशी होतो असा एक आलाप सहज जुळतो करितां तसें मानून

$य = \frac{क्ष^२}{२}$ ही किंमत द्वितीयराशींत ठेवून.

क्ष = प्रथमराशि आणि $\frac{क्ष^२}{२} + १$ = द्वितीयराशि.

आतां दुसऱ्या आलापाप्रमाणें $प्रथमराशि^२ + द्वितीयराशि^२ - १ = क्ष^२ + \frac{क्ष^४}{४} + क्ष^२ + १ - १ = \frac{क्ष^४}{४} + २ क्ष^२$ हा वर्गराशि असला पाहिजे. व वर्गास वर्गानें भागिलें असतां वर्गत्व हानि होत नसते म्हणून या वर्गराशीस $क्ष^२$ नें भागून $\frac{क्ष^२}{४} + २$ हा ही वर्गराशि असला पाहिजे. व हें उदाहरण वर्गप्रकृतीचें झालें. म्हणून बीजांतील—" इष्टभक्तो द्विधा क्षेपो इष्टोनाढ्यो दलीकृतः ॥ गुणमूलहृतश्चाऽऽद्यो ह्रस्वज्येष्ठे क्रमात्पदे " या सूत्रानें $\frac{१}{२ इष्ट}$ असें इष्टसंख्येचें मान कल्पून कनिष्ठमान म्हणजे क्ष ची किंमत $\frac{८ इ^२ - १}{२ इष्ट}$ ही आली. व $\frac{क्ष^२}{२} + १$ अशी द्वितीय

वर्गकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—इष्टकृति रष्टगुणिता व्येका दलिता विभाजितेष्टेन ॥ एकः स्यादस्य कृतिर्दलिता सैका परो राशिः॥ रूपं द्विगुणेष्टहृतं सेष्टं प्रथमोऽथवापरो रूपम् ॥ कृतियुतिवियुती व्येके वर्गौ स्यातां ययो राश्योः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व वजाबाकी या प्रत्येकींतून १ वजा केला असतां ज्या बाक्या राहतात त्या वर्गराशी होतात अशा दोन संख्या काढण्याची रीति पहिली—प्रथम इष्टसंख्या कल्पून तिच्या वर्गास ८ नीं गुणून १ वजा करावा, नंतर जी बाकी राहील तिच्या अर्धास इष्टसंख्येनें भागावें म्हणजे पहिली संख्या येते. आणि या पहिल्या संख्येच्या वर्गाचे अर्धांत १ मिळविला असतां दुसरी संख्या येते.

दुसरी रीति—इष्टसंख्येच्या दुप्पटीनें १ या संख्येस भागून त्यांत इष्टसंख्या मिळविली असतां पहिली संख्या होते. व दुसरी संख्या १ हीच समजावी.

उदाहरणम्—राश्योर्ययोः कृतिवियोगयुती निरेके मूलप्रदे प्रवद तौ मम मित्र यत्र ॥ क्लिश्यंति बीजगणिते पटवोऽपि मूढाः षोढोक्तबीजगणितं परिभावयंतः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व वजाबाकी या प्रत्येकींतून १ वजा केला असतां ज्या बाक्या राहतात त्या वर्गराशि असतात अशा दोन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या $\frac{1}{2}$ धरून याचा वर्ग $\frac{1}{4}$ यास ८ नीं गुणून २ यांतून १

वजा करून शेष १ याचें अर्ध $\frac{१}{२}$ यास इष्ट $\frac{१}{२}$ नें भागून १ हा प्रथमराशि झाला.

या प्रथमराशीचा वर्ग १ याचें अर्ध $\frac{१}{२}$ यांत १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा द्वितीयराशि झाला. ∴ १ व $\frac{३}{२}$ संख्या हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या रीतीनें सोडवूं. इष्ट १ याच्या दुपटीनें १ स भागून $\frac{१}{२}$ यांत इष्ट १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा प्रथम राशि झाला. व द्वितीय राशि १ च समजावा. ∴ $\frac{३}{२}$ व १ संख्या हें उत्तर. या प्रमाणें इष्टवशेकरून अनंत उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

क्ष = प्रथमराशि आणि य + १ = द्वितीयराशि धरून प्रथमराशिवर्ग = $क्ष^२$ आणि द्वितीयराशिवर्ग = $य^२ + २ य + १$ येथें $क्ष^२ = २ य$ जर मानिलें तर वर्गांतरांतून १ वजा करून वर्गराशी होतो असा एक आलाप सहज जुळतो करितां तसें मानून

$$य = \frac{क्ष^२}{२}$$ ही किंमत द्वितीयराशींत ठेवून.

क्ष = प्रथमराशि आणि $\frac{क्ष^२}{२} + १$ = द्वितीयराशि.

आतां दुसऱ्या आलापाप्रमाणें $प्रथमराशि^२ + द्वितीयराशि^२ - १ = क्ष^२ + \frac{क्ष^४}{४} + क्ष^२ + १ - १ = \frac{क्ष^४}{४} + २ क्ष^२$ हा वर्गराशि असला पाहिजे. व वर्गास वर्गानें भागिलें असतां वर्गत्व हानि होत नसते म्हणून या वर्गराशीस $क्ष^२$ नें भागून $\frac{क्ष^२}{४} + २$ हा ही वर्गराशि असला पाहिजे. व हें उदाहरण वर्गप्रकृतीचें झालें. म्हणून बीजांतील—" इष्टभक्तो द्विधा क्षेपो इष्टोनाढ्यो दलीकृतः ॥ गुणमूलहृतश्चाऽऽद्यो ह्रस्वज्येष्टे क्रमात्पदे " या सूत्रानें $\frac{१}{२ इष्ट}$ असें इष्टसंख्येचें मान कल्पून कनिष्ठमान म्हणजे क्ष ची किंमत $\frac{८ इ^२ - १}{२ इष्ट}$ ही आली. व $\frac{क्ष^२}{२} + १$ अशी द्वितीय

राशीची किंमत आहे म्हणून सूत्रांत दिलेल्या पहिल्या रीती
उपपत्ति झाली.

आतां दुसऱ्या रीतीची उपपत्ति स्पष्ट करून देऊं—

क्ष = प्रथमराशि आणि १ = द्वितीयराशि धरून.

यांच्या वर्गयोगांतून १ वजा केला असतां वर्गराशी हो
असा एक आलाप सहज जुळला म्हणून क्ष^2 − १ − १= क्ष^2 −
२ हाही वर्गराशि असला पाहिजे. म्हणून −२इष्ट अ
इष्ट संख्येची कल्पना करून ‘ इष्ट भक्तो द्विघा ’ इत्यादि सूत्रा
कनिष्ठमान म्हणजे क्ष ची किंमत $\frac{१}{२\text{इष्ट}}$ + इष्ट अशी आ
म्हणून दुसऱ्या रीतीची सिद्धि झाली.

**सूत्रम्—इष्टस्य वर्गवर्गो घनश्च तावष्ट संगुणौ प्रथमः
सैको राशी स्याता मेवं व्यक्तेऽथवाऽव्यक्ते ॥**

अर्थ—या सूत्रांत मागील उदाहरण सोडविण्यास निरा
रीति सांगितली आहे ती समीकरणरूपानें देऊं.

८ इष्ट^4 + १ = प्रथमराशि. ८ इष्ट^3 = द्वितीयराशि.

उपपत्ति.

या + १ = प्रथमराशि आणि का = द्वितीयराशि धरू
उदाहरणांत सांगितल्या प्रमाणें.

(या + १)^2 + का^{2} − १ = या^{2} + २ या + का^{2}

(या + १)^2 − का^{2} − १ = या^{2} + २ या − का^{2}

येथें २ या = नी^{2} आणि २ यानी = का^{2} अशा किंमत
धरल्या असतां या^{2} + नी^{2} + २ यानी आणि या^{2} + नी^{2} −
२ यानी असे दोन्ही वर्गराशि होतात.

$\therefore \quad या = \frac{नी^{२}}{२}$

$कों = नी^{३}$

येथें नी = ४ इष्टें अशी किंमत धरून

$या = \frac{१६ \ इष्टें^{२}}{२} = ८ \ इष्टें^{२}$

$कों = ६४ \ (इष्टें)^{३}$

$\therefore \quad का = ८ \ इष्टें^{३}$

$\therefore \quad प्रथमराशि = ८ \ इ^{४} + १$

$द्वितीयराशि = ८ \ इ^{३}$

$\therefore$ इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

श्लोकः—पाटीसूत्रोपमं बीजं गूढमित्यवभासते ॥ नास्ति गूढममूढानां नैव षोढेत्यनेकधा ॥

अर्थ—अंकगणिताप्रमाणें बीजही मूढांना गूढ वाटतें. परंतु प्राज्ञांना तें गूढ नसून अनेक प्रकारचें आहे.

गुणकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—गुणघ्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य युक्तस्य गुणार्धकृत्या ॥ मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं प्रष्टुरभीष्टराशिः ॥ यदा लवैश्चोनयुतः स राशिरेकेन भागोनयुतेन भक्त्वा ॥ दृश्यं तदा मूलगुणं च ताभ्यां साध्यस्ततः प्रोक्तवदेव राशिः ॥

अर्थ—ज्या वेळेस एखाद्या गुणकानें गुणित अशा स्वकीय

वर्गमूलानें उणा किंवा युक्त राशी असतो. त्या वेळीं मूलगुणकाच्यां (वर्गमूळाच्या गुणकाच्या) अर्धाचा वर्ग दृश्य संख्येमध्यें मिळवावा. आलेल्या बेरजेचें वर्गमूळ काढून त्यांत मूलगुणकाचें अर्ध मिळवावें किंवा वजा करावें, नंतर त्याचा वर्ग केला असतां उत्तर येतें.

ज्या वेळेस राशि स्वभागानें उणा किंवा अधिक असेल त्यावेळीं स्वभागानें उणा किंवा अधिक असा १ करून त्यानें दृश्य व मूलगुणक या दोघांस भागून जे पृथक् भागाकार येतील तें दृश्य व मूलगुणक कल्पून पूर्वोक्त क्रिया केली असतां उत्तर येतें.

या सूत्राची उपपत्ति लक्ष्यांत येण्याकरितां पुढील उदाहरण बीजक्रियेनें सोडवून दाखवितों.

उदाहरणम्—बाले मरालकुलमूलदलानि सप्त तीरे विलासभरमंथरगाण्यपश्यम् ॥ कुर्वच केलिकलहं कलहंसयुग्मं शेषं जले वद मरालकुलप्रमाणम् ॥

अर्थ—एके ठिकाणीं हंस पक्ष्यांचा समुदाय होता. त्यांतून त्याचे वर्गमूळाच्या अर्धाची ७ पट इतके हंस तीरावर गेले व बाकी २ हंस तेथें राहिले होते तर त्या समूहांत हंसपक्षी किती होते हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

मूलगुणक $\frac{७}{२}$ याच्या अर्धाचा वर्ग $\frac{४९}{१६}$ हा दृश्य २ मध्यें मिळवून $\frac{८१}{१६}$ याचें वर्गमूळ $\frac{९}{४}$ यांत मूलगुणकाचें अर्ध $\frac{७}{४}$ मिळवून ४ याचा वर्ग १६ इतके हंसपक्षी होते हें उत्तर.

आतां हेंच उदाहरण सूत्राची उपपत्ति समजण्याकरितां बीजक्रियेनें सोडवूं.

$$क्ष = \text{हंसपक्षी धरून}$$

$$क्ष - \frac{७}{२}\sqrt{क्ष} = २$$

उभयपक्षांत $\frac{७}{२ \times २}$ चा वर्ग मिळवून

$$क्ष - \frac{७}{२}\sqrt{क्ष} + \left(\frac{७}{४}\right)^{२} = २ + \left(\frac{७}{४}\right)^{२}$$

उभयपक्षांचीं वर्गमूलें काढून

$$\sqrt{क्ष} - \frac{७}{४} = \sqrt{२ + \left(\frac{७}{४}\right)^{२}}$$

$$\sqrt{क्ष} = \sqrt{२ + \left(\frac{७}{४}\right)^{२}} + \frac{७}{४}$$

$$\therefore क्ष = \left(\sqrt{२ + \left(\frac{७}{४}\right)^{२}} + \frac{७}{४}\right)^{२}$$

$\therefore$ इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—स्वपदैर्नवभिर्युक्तः स्याच्चत्वारिंशताऽधिकम् ॥ शतद्वादशकं विद्वन्कः स राशिर्निगद्यताम् ॥

अर्थ—ज्या राशीमध्यें तिच्या वर्गमूळाची ९ पट मिळविली असतां १२४० होतात तर तो राशि कोणता हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

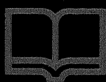
येथें मूलगुणक ९ याचें अर्ध $\frac{९}{२}$ याचा वर्ग $\frac{८१}{४}$ यांत दृश्यसंख्या १२४० मिळवून $\frac{५०४१}{४}$ याचें वर्गमूळ $\frac{७१}{२}$ यांतून मूलगुणकार्ध $\frac{९}{२}$ वजा करून ३१ याचा वर्ग ९६१ इष्टसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—यातं हंसकुलस्य मूलदशकं मेघागमे मानसं प्रोड्डीय स्थलपद्मिनीवनमगादष्टांशकोऽभस्तटात् ॥ बाले बालमृणालशालिनि जले केलिक्रियालालसं दृष्टं हंसयुगत्रयं च सकलां यूथस्य संख्यां वद ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं हंस पक्ष्यांचा समूह होता. त्यांतून त्याच्या वर्गमूळाच्या दसपट हंस मानस सरोवरास गेले. तसेंच त्या समूहाच्या ८ व्या हिश्शाइतके हंस कमलवनास गेले. व बाकी ६ हंस तेथें शिल्लक राहिले तर त्या समूहांत हंसपक्षी किती होते हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें भाग $\frac{१}{८}$ आहे हा १ तून वजा करून बाकी $\frac{७}{८}$ यानें मूलगुणक १० व दृश्यसंख्या ६ या उभयतांस भागून भागाकार $\frac{८०}{७}$ व $\frac{४८}{७}$



झाले. आतां मूलगुणक $\frac{८०}{७}$ व दृश्य $\frac{४८}{७}$ कल्पून सांगितलेली क्रिया करूं. $\frac{८०}{७}$ याचें अर्ध $\frac{४०}{७}$ याचा वर्ग $\frac{१६००}{४९}$ यांत दृश्य $\frac{४८}{७}$ मिळवून $\frac{१९३६}{४९}$ यांचें मूळ $\frac{४४}{७}$ यांत मूलगुणकार्ध $\frac{४०}{७}$ मिळवून १२ याचा वर्ग १४४ इष्टसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संदधे तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ॥ शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपि च्छत्रं ध्वजं कार्मुकं चिच्छेदास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः संदधे ॥

अर्थ—युद्धांत कर्णाचा वध होण्याकरितां अर्जुनानें जे बाण सोडिले. त्यांतील निम्म्या बाणांनीं शत्रूच्या बाणांचें निवारण केलें. व मूळाच्या चौपट बाणांनीं घोडे मारिले. नंतर ६ बाणांनीं शल्यास मारून ३ बाणांनीं छत्र, ध्वज व कार्मुक यांचें छेदन करून शेवटीं १ बाणानें त्याचा शिरच्छेद केला तर अर्जुनानें किती बाण सोडिले हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें भाग $\frac{१}{२}$ हा १ तून वजा करून बाकी $\frac{१}{२}$ हिनें मूलगुणक ४ व दृश्यसंख्या १० यांस क्रमानें भागून ८ व २० भागाकार आले. आतां मूलगुणक ८ व दृश्य २० मानून उक्त क्रिया करूं. मूलगुणक ८ याचे अर्धाचा वर्ग १६ यांत दृश्य मिळवून ३६ यांचें मूळ ६ यांत मूलगुणार्ध ४ मिळवून १० याचा वर्ग १०० इष्टसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ निखिलनवमभागाश्चालिनीभृंगमेकम् ॥ निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं प्रतिरणति रणंतं ब्रूहि कांतेऽलिसंख्याम् ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं भ्रमर समूह होता. त्याच्या अर्धाचें वर्गमूळाइतके भ्रमर व समूहाचे $\frac{८}{९}$ इतके भ्रमर मालती वृक्षावर गेले व २ भ्रमर तेथें शिल्लक होते तर त्या समूहांत भ्रमर किती होते हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = भ्रमर संख्या धरून

$$क्ष - \sqrt{\frac{क्ष}{२}} - \frac{८}{९}क्ष = २$$

उभयपक्षांस २ नें भागून

$$\frac{क्ष}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{\frac{क्ष}{२}} - \frac{८}{९}\cdot\frac{क्ष}{२} = १$$

येथें $\frac{क्ष}{२} = क्ष'$ धरून

$$क्ष' - \frac{१}{२}\sqrt{क्ष'} - \frac{८}{९}क्ष' = १$$

येथें मूलगुणक $\frac{१}{२}$, भाग $\frac{८}{९}$ व दृश्य १ याप्रमाणें आहे म्हणून $\frac{८}{९}$ भाग १ तून वजा करून $\frac{१}{९}$ या बाकीनें मूलगुणक $\frac{१}{२}$ व दृश्य १ यांस क्रमानें भागून भागाकार $\frac{९}{२}$ व ९ असे आले तेव्हां मूलगुणक $\frac{९}{२}$ व दृश्य ९ कल्पून पूर्वोक्त क्रिया करूं.

$\frac{९}{२}$ चे अर्धाचा वर्ग $\frac{८१}{१६}$ यांत दृश्य ९ मिळवून $\frac{२२५}{१६}$ याचें मूळ $\frac{१५}{४}$ यांत मूलगुणार्ध $\frac{९}{४}$ मिळवून ६ याचा वर्ग ३६ ही किंमत क्ष' ची आली म्हणून ३६ × २ = क्ष ची किंमत झाली ∴ ७२ भ्रमर होते हें उत्तर.

उदाहरणम्—यो राशिरष्टादशभिः स्वमूलैराशित्रिभागेण समन्वितश्च ॥ जातं शतद्वादशकं तमाशु जानीहि पाट्यां पटुताऽस्ति ते चेत् ॥

अर्थ—ज्या संख्येंत तिच्या वर्गमूळाची १८ पट आणि त्याच संख्येचा $\frac{१}{३}$ मिळविला असतां १२०० होतात तर ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{१}{३}$ भाग १ त मिळवून $\frac{४}{३}$ यानें मूलगुणक १८ व दृश्य १२०० यांस भागून क्रमानें भागाकार $\frac{२७}{२}$ व ९०० आले. आतां मूलगुण $\frac{२७}{२}$ व दृश्य ९०० धरून उक्तक्रिया करूं. $\frac{२७}{२}$ चे अर्धाचा वर्ग $\frac{७२९}{१६}$ यांत ९०० मिळवून त्याचें वर्गमूळ $\frac{१२३}{४}$ यांतून मूलगुणार्ध $\frac{२७}{४}$ वजा करून बाकी २४ हिचा वर्ग ५७६ इष्टसंख्या झाली हें उत्तर.

इति गुणकर्मसमाप्तम्.

अथ त्रैराशिकप्रकरणम्.

सूत्रम्—प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यंतयोस्तत्फलमन्यजाति ॥ मध्ये तदिच्छाहतमाद्यहृत्स्यादिच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोमे ॥

अर्थ—त्रैराशिकांतील आद्यराशीस प्रमाण, मध्यराशीस फल, आणि अंत्यराशीस इच्छा असें म्हणतात. आणि या तिन्हींपासून जें उत्तर काढावयाचें त्यास इच्छाफल असें म्हणतात.

त्रैराशिकामध्यें प्रमाण व इच्छा हे राशि समानजातीचे असले पाहिजेत व फल हें निराळ्या जातीचें पाहिजे.

जेव्हां समत्रैराशिक असतें त्या वेळीं इच्छांकानें फलास गुणून प्रमाणांकानें भागिलें असतां इच्छाफल येतें.

ज्या वेळीं व्यस्त त्रैराशिक असतें त्या वेळीं फलांकास प्रमाणांकानें गुणून इच्छांकानें भागावें म्हणजे इच्छाफल येतें.

सूत्रम्—इच्छावृद्धौ फले वृद्धिर्ह्रासे ह्रासश्च जायते ॥ समत्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥

अर्थ—ज्या वेळेस प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक जास्त असून फलांकापेक्षां इच्छाफल जास्त येत असेल त्या वेळीं समत्रैराशिक म्हणावें. किंवा प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक कमी असून फलांकापेक्षां इच्छाफल कमी येत असल्यास समत्रैराशिक असें म्हणतात.

उदाहरणम्—कुंकुमस्य सदलं पलद्वयं निष्कसप्तमलवैस्त्रिभिर्यदि ॥ प्राप्यते सपदि मे वणिग्वर ब्रूहि निष्कनवकेन तत्कियत् ॥

अर्थ—जर $\frac{३}{७}$ निष्कास २$\frac{१}{२}$ पळें कुंकु येतें तर ९ निष्कास किती कुंकु येईल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रमाणांक		फलांक		इच्छांक
निष्क		पळें		निष्क
$\frac{३}{७}$	:	२$\frac{१}{२}$	::	९

हें समत्रैराशिक आहे.

$\therefore \frac{५}{२} \times \frac{९}{१} \times \frac{७}{३} = \frac{१०५}{२} =$ ५२$\frac{१}{२}$ पळें इच्छाफल, हें उत्तर.

उदाहरणम्—प्रकृष्टकर्पूरपलत्रिषष्ट्या चेल्लभ्यते निष्क-चतुष्कयुक्तम् ॥ शतं तदा द्वादशभिः सपादैः पलैः किमाचक्ष्व सखे विचिंत्य ॥

अर्थ—जर ६३ पळें कापरास १०४ निष्क पडतात, तर १२$\frac{१}{४}$ पळें कापरास काय पडेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पळें		निष्क		पळें
६३	:	१०४	::	१२$\frac{१}{४}$

हें त्रैराशिक सम आहे म्हणून $\frac{१०४}{१} \times \frac{४९}{४} \times \frac{१}{६३} = \frac{१८२}{९}$ निष्क हें उ०

उदाहरणम्—द्रम्मद्वयेन साष्टांशा शालितंडुलखारिका॥ लभ्या चेत्पणसप्तत्या तत्किं सपदि कथ्यताम् ॥

अर्थ—जर २ द्रम्मास १$\frac{१}{८}$ खारिका तांदूळ मिळतात तर ७० पैशास किती तांदूळ मिळतील हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पैसे		खारिका		पैसे
३२	:	१$\frac{१}{८}$	::	७०

हें समत्रैराशिक आहे म्हणून—

$\frac{७०}{१} \times \frac{९}{८} \times \frac{१}{३२} = \frac{३१५}{१२८} =$ २$\frac{५९}{१२८}$ खारिका हें उत्तर.

सूत्रम्—इच्छावृद्धौ फले ह्रासो ह्रासे वृद्धिश्च जायते ॥ व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥

अर्थ—प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक जास्त असून फलांकापेक्षां इच्छाफल कमी येत असेल तर व्यस्तत्रैराशिक समजावें. किंवा प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक कमी असून फलांकापेक्षां इच्छाफल जास्त येत असेल तर व्यस्तत्रैराशिक समजावें ?

सूत्रम्—जीवानां वयसो मौल्ये तौल्ये वर्णस्य हेमनि ॥ भागहारे च राशीनां व्यस्तं त्रैराशिकं विदुः ॥

अर्थ—ज्या उदाहरणांत प्राण्यांच्या वयाच्या मौल्याचा संबंध असेल तेथें व्यस्तत्रैराशिक समजावें. विवक्षित कसाच्या सोन्याचे वजनाचा संबंध असल्यास व्यस्तत्रैराशिक समजावें. किंवा विवक्षित मापानें धान्यादिराशि मोजण्याचा संबंध असल्यास व्यस्तत्रैराशिक समजावें.

उदाहरणम्—प्राप्नोति चेत्षोडशवत्सरा स्त्री द्वात्रिंशतं विंशतिवत्सरा किम् ॥ द्विधूर्वहो निष्कचतुष्कमुक्षा प्राप्नोति धूः षट्कवहस्तदा किम् ॥

अर्थ—जर १६ वर्षांची स्त्री ३२ निष्कांस मिळते तर २० वर्षांच्या स्त्रीस किती निष्क पडतील ?

जर २ धुरांचा बैल (ज्यास धूर वाहूं लागून २ वर्षें झालीं असा) ४ निष्कास मिळतो तर ६ धुरांचा बैल किती किमतीस पडेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

वर्षें		निष्क		वर्षं
१६	:	३२	::	२०

व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून,

$\frac{१६ \times ३२}{२०} = \frac{१२८}{५} =$ २५ ३/५ हें उत्तर.

वर्षे		निष्क		वर्षे
२	:	४	::	६

व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून

$\frac{४ \times २}{६} = १\frac{१}{३}$ निष्क हें उत्तर.

उदाहरणम्—दशवर्णं सुवर्णं चेद्गद्याणकमवाप्यते ॥
निष्केण तिथिवर्णं तु तदा वद कियन्मितम् ॥

अर्थ—जर एका निष्कास १० कशी सोनें १ गद्याणक मिळतें तर तितक्याच किमतीस १५ कशी सोनें किती मिळेल हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

कस		ग.		कस
१०	:	१	::	१५

व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून,

$\frac{१० \times १}{१५} = \frac{२}{३}$ गद्याणक हें उत्तर.

उदाहरणम्—सप्ताढकेन मानेन राशौ सस्यस्य मापिते॥
यदि मानशतं जातं तदा पंचाढकेन किम् ॥

अर्थ—जर एक धान्याची रास ७ आढका येवढ्या मापानें मोजली तर १०० मापें भरतात, तर तीच रास ५ आढका येवढ्या मापानें मोजली तर किती भरेल.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

आ०		मा०		आ०
७	:	१००	::	५

हें व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून,

$\frac{१०० \times ७}{५} =$ १४० मापें हें उत्तर.

अथ पंचराशिकादि प्रकरणम्.

सूत्रम्--पंचसप्तनवराशिकादिकेऽन्योन्यपक्षनयनं फलच्छिदाम् ॥ संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलम् ॥

अर्थ—पंचराशिक, सप्तराशिक इत्यादिकांमध्यें फलांक इच्छांकपक्षांत न्यावा; व छेदांचा संभव असल्यास, ते ज्या पक्षांत असतील त्याहून अन्य पक्षांत न्यावेत म्हणजे प्रमाणांकपक्षांत ते असल्यास इच्छांकपक्षांत, इच्छांकपक्षांत असल्यास प्रमाणांकपक्षांत छेद न्यावेत. याप्रमाणें केलें असतां फलांक ज्या पक्षांत नेला त्यांत पुष्कळ राशि होतात व दुसऱ्यांत कमी होतील. नंतर पुष्कळ राशींचा गुणाकार करून त्यास अल्पराशींच्या गुणाकारानें भागिलें असतां इच्छा फल येतें.

उदाहरणम्—मासे शतस्य यदि पंचकलांतरं स्याद्वर्षे गते भवति किं वद षोडशानाम् ॥ कालं तथा कथय मूलकलांतराभ्यां मूलं धनं गणककालफले विदित्वा ॥

अर्थ—एका महिन्यांत १०० रुपयांचें व्याज ५ रुपये येतें तर १ वर्षांत १६ रुपयांचें व्याज काय येईल ? तसेंच मुद्दल व व्याज यांपासून मुदत, व मुदत आणि व्याज यांपासून मुद्दल सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१ महिना	५ रुपये व्याज	१२ महिने	} सम
१०० रुपये		१६ रुपये	} सम

$$\frac{५ \times १२ \times १६}{१००} = ९\frac{३}{५}$$ रु० व्याज हें उत्तर.

दुसरें उदाहरण.

१०० रु० . १ महिना .. १६ रु० } व्यस्त
५ व्याज . .. ९ ३/५ रु० व्या. } सम

(१०० × ४८ × १) / (१६ × ५ × ५) = १२ महिने हें उत्तर.

तिसरें उदाहरण.

१ महिना . १०० मुद्दल .. १२ म० } व्यस्त
५ व्याज . .. ४८/५ व्याज } सम

(१०० × ४८ × १) / (१२ × ५ × ५) = १६ मुद्दल हें उत्तर.

उदाहरणम्—सत्र्यंशमासेन शतस्य चेत्स्यात्कलांतरं पंच सपंचमांशाः ॥ मासैस्त्रिभिः पंचलवाधिकैस्तत्सार्धद्विषष्टेः फलमुच्यतां किम् ॥

अर्थ—जर १ १/३ महिन्यांत १०० रुपयांचे ५ १/५ रुपये व्याज होतें, तर ३ १/५ महिन्यांनीं ६२ १/२ रुपयांचे व्याज किति होईल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

४/३ म० . २६/५ व्याज .. १६/५ म० } सम
१०० रु० . .. १२५/२ रु० } सम

(२६ × १६ × १२५ × ३) / (५ × ५ × २ × ४ × १००) = ७ ४/५ हें उत्तर.

उदाहरणम्—विस्तारे त्रिकराः कराष्टकमिता दैर्घ्ये विचित्राश्च चेद्रूपैरुत्कटपट्टसूत्रपटिका अष्टौ लभंते शतम् ॥ दैर्घ्ये सार्धकरत्रयाऽपरपटी हस्तार्धविस्तारिणी तादृक्किं लभते द्रुतं वद वणिग्वाणिज्यकं वेत्सि चेत् ॥

अर्थ— ८ हात लांब व ३ हात रुंद अशीं रेशमी ८ वस्त्रें १०० निष्कांस मिळतात; तर ३½ हात लांब ½ हात रुंद अशा एका रेशमी वस्त्रास काय पडेल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

८ हा० लां०	. १०० निष्क	.. $\frac{7}{2}$ हा० लां०	सम
३ हा० रुं०		$\frac{1}{2}$ हा० रुं०	सम
८ वस्त्रें	.	.. १ वस्त्र.	सम

$\frac{१०० \times ७ \times १ \times १}{८ \times २ \times २ \times ३ \times ८} = \frac{१७५}{१९२}$ निष्क हें उत्तर.

उदाहरणम्—पिंडे येऽर्कमितांगुलाः किल चतुर्वर्गांगुला विस्तृतौ पट्टा दीर्घतया चतुर्दशकरास्त्रिंशल्लभंते शतम् ॥ एता विस्तृतिपिंडदैर्घ्यमितयो येषां चतुर्वर्जिताः पट्टास्ते वद मे चतुर्दश सखे मूल्यं लभंते कियत् ॥

अर्थ—१४ हात लांब, १६ अंगुळे रुंद व १२ अंगुळे जाड अशा ३० फळ्या १०० निष्कांस मिळतात. तर ज्याची लांबी, रुंदी व जाडी प्रत्येकीं पूर्वीच्या फळ्यापेक्षां ४ नीं कमी अशा १४ फळ्यांस काय पडेल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१४ हा० लां०	. १०० निष्क	.. १० हा० लां०	
१६ अं० रुं०		१२ अं० रुं०	सम
१२ अं० जा०		८ अं० जा०	
३० फळ्या	.	.. १४ फ०	

$\therefore \frac{१०० \times १० \times १२ \times ८ \times १४}{१४ \times १६ \times १२ \times ३०} = १६\frac{२}{३}$ निष्क हें उत्तर.

उदाहरणम्—पट्टा ये प्रथमोदितप्रमितयो गव्यूतिमात्रे

स्थितास्तेषामानयनाय चेच्छकटिनां द्रम्माष्टकं भाटकम् ॥
अन्ये ये तदनंतरं निगदिता माने चतुर्वर्जितास्तेषां का
भवतीति भाटकमितिर्गव्यूतिषट्के वद ॥

अर्थ---मागच्या उदाहरणांत सांगितलेल्या मानाच्या ३० फळ्या गव्यूति अंतरावर आहेत. त्या आणावयास गाडीभाडें ८ द्रम्म पडतें. तर पूर्वीच्याच उदाहरणांत सांगितलेल्या मानाच्या ज्या १४ फळ्या त्या ६ गव्यूति अंतरावरून आणावयास भाडें काय पडेल ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

	८ द्रम्म ..	१० हा० लां०
१४ हा० लां०		
		१२ अं० रुं०
१६ अं० रुं०		
		८ अं० जा०
१२ अं० जा०		
		१४ फळ्या
३० फळ्या		
	..	६ गव्यूति
१ गव्यूति		

(उजवीकडील रकाना: सम)

$$\therefore \frac{८ \times १० \times १२ \times ८ \times १४ \times ६}{१४ \times १६ \times १२ \times ३० \times १} = ८$$ द्रम्म हें उत्तर.

भांडप्रतिभांडकक्रियासूत्रम्---तथैव भांडप्रतिभांडकेऽपि विधिर्विपर्यस्य हरांश्च मूल्ये ॥

अर्थ---दोन भिन्नजातीच्या पदार्थांचा विनियम करावयाचा असल्यास इच्छावस्तु मध्यें मांडून आद्यंतीं समान जाती मांडाव्या नंतर त्यांतील मूल्यांचा विपर्यास (म्हणजे अन्योन्य पक्षांमध्यें नेणें) करून, व छेद असल्यास त्यांचाही विपर्यास करून, पंचराशिप्रमाणें कृति केली असतां उत्तर येतें.

उदाहरणम्---द्रम्मेण लभ्यत इहाऽऽम्रशतत्रयं चेत्त्रि-

स्त्पणेन विपणौ वरदाडिमानि ॥ आम्रैर्वदाऽऽशु दशभिः कति दाडिमानि लभ्यानि तद्विनिमयेन भवन्ति मित्र ॥

अर्थ—जर बाजारांत १ द्रम्मास म्हणजे १६ पैशांस ३०० आंबे मिळतात; तसेंच १ पैशास ३० डाळिंबें मिळतात. तर १० आंबे देऊन किती डाळिंबें मिळतील.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३०० आंबे · ३० डाळिंबें ·· १० आंबे.

१६ पैसे · ·· १ पैसा.

येथें मूल्यांचा विपर्यास करून

$$\frac{१६ \times ३० \times १०}{३०० \times १} = १६$$ डाळिंबें हें उत्तर.

उपपत्ति.

३०० आंबे : १६ पैसे :: १० आंबे

$\frac{१६ \times १०}{३००}$ ही १० आंब्यांची किंमत झाली.

∴ १ पैसा : ३० डाळिंबे :: $\frac{१६ \times १०}{३००}$ पैसे.

∴ $\frac{१६ \times ३० \times १०}{३००} = १६$ डाळिंबें हें उत्तर.

याप्रमाणें पंचराशिकादिकांचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

मिश्रव्यवहार.

सूत्रम्—प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं विमिश्रकालेन हतं फलं च । स्वयोगभक्ते च पृथक्स्थिते ते मिश्राहते मूलकलांतरे स्तः ॥ यद्वेष्टकर्माख्यविधेस्तु मूलं मिश्राच्च्युतं तच्च कलांतरं स्यात् ॥

अर्थ—प्रमाणकालानें प्रमाणधनास गुणावें व विमिश्रकालानें (मुदतीनें) फलास (व्याजास) गुणावें. नंतर आलेले गुणाकार पृथक् दोन ठिकाणीं मांडून त्यांस त्यांच्या बेरजेनें भागून आलेल्या भागाकारांस मिश्रानें (राशीनें) गुणिलें असतां अनुक्रमानें मुद्दल व व्याज हीं होतात.

अथवा इष्टराशिकानें मुद्दल काढावें. व तें राशींतून वजा करून व्याज काढावें.

उदाहरणम्—पंचकेन शतेनाब्दे मूलं स्वं सकलांतरम् ॥ सहस्रं चेत्पृथक्तत्र वद मूलकलांतरे ॥

अर्थ—दरमहा दर शेंकडा ५ रुपये व्याजाप्रमाणें एकास रुपये दिले त्यानें एका वर्षांत व्याज मुद्दलसुद्धां १००० रुपये आणून दिले तर मुद्दल किती व व्याज किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{मुद्दल} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{मिश्रकाल} \times \text{व्याज}}$$

या सारणींत उदाहरणांत दिलेल्या किमती ठेवून.

$$\text{मुद्दल} = \frac{१००० \times १०० \times १}{१०० \times १ + १२ \times ५}$$

$$\therefore\ \text{मुद्दल} = \frac{१००००००}{१६०} = ६२५\ \text{हें उत्तर.}$$

$$\text{व्याज} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल}}{\text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल} + \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}$$

या सारणींत किंमती ठेवून.

$$\text{व्याज} = \frac{१००० \times ५ \times १२}{५ \times १२ + १०० \times १}$$

$$\therefore\ \text{व्याज} = \frac{६०००}{१६०} = ३७५\ \text{हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

क्ष = मुद्दल धरून.

१०० रु.	.	५ रु. व्या.	..	क्ष. रु.
१ म.	.		..	१२ म.

या पंचराशिकावरून.

$$\text{व्याज} = \frac{५ \times १२ \times \text{क्ष}}{१०० \times १}$$

यांत क्ष मिळविला असतां मिश्र द्रव्य होतें.

$$\therefore\ \text{क्ष} + \frac{५ \times १२ \times \text{क्ष}}{१०० \times १} = १०००$$

$$\therefore\ \text{क्ष} \times १०० \times १ + ५ \times १२ \times \text{क्ष}$$
$$= १००० \times १०० \times १$$

$$\therefore\ \text{क्ष} = \frac{१००० \times १०० \times १}{१०० \times १ + ५ \times १२}$$

$$\therefore\ \text{मुद्दल} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{मिश्रकाल} \times \text{व्याज}}$$

आतां य = व्याज धरून

५ रु. व्या. . १०० रु. मु. .. य. व्याज } सम
१ म. . .. १२ म. } व्यस्त

या पंचराशिकावरून.

$$\text{मुद्दल} = \frac{१०० \times १ \times य}{५ \times १२}$$

यांत व्याज य मिळविलें असतां राशि होते.

$$\therefore \quad य + \frac{१०० \times १ \times य}{५ \times १२} = १०००$$

$$\therefore य \times ५ \times १२ + १०० \times १ \times य = १००० \times ५ \times १२$$

$$\therefore \; य = \frac{१००० \times ५ \times १२}{५ \times १२ + १०० \times १}$$

$$\therefore \text{व्याज} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल}}{\text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल} + \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}$$

म्हणून इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

आतां दिलेलें उदाहरण इष्ट राशीनें सोडवून दाखवितों. प्रथम मुद्दल १ रुपया इष्ट धरून

१ म. . ५ रु. व्या. .. १२ म. } सम
१०० रु. . .. १ रु. }

या पंचराशिकावरून.

$$\frac{५ \times १२ \times १}{१०० \times १} = \frac{६०}{१००} = \frac{३}{५} \text{ हें व्याज झालें}$$

मुद्दल १ रुपया + $\frac{३}{५}$ = $\frac{८}{५}$ रास झाली.

$\therefore$ ८ रास : १ रु. मुद्दल :: १००० रा०

$$\frac{१००० \times ९}{८} = \frac{९०००}{८} = ६२५ \text{ रु. मुद्दल.}$$

व १००० − ६२५ = ३७५ व्याज हें उत्तर.

सूत्रम्—अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला व्यतीतकालघ्न-फलोद्धृतास्ते ॥ स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिघ्नाः प्रयुक्तखंडानि पृथग्भवंति ॥

अर्थ—प्रमाणधनांनीं प्रमाणकालास गुणून जे गुणाकार येतील त्यांस, खंडाच्या मुदतींनीं व्याजाचे दरास गुणून आलेल्या गुणाकारांनीं क्रमानें भागावें. नंतर जे भागाकार येतील त्यांस त्यांच्या बेरजेनें भागून मिश्रधनानें गुणिलें असतां पृथक्‌खंडे येतील.

उदाहरणम्—यत्पंचकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं खंडैस्त्रिभिर्गणकनिष्कशतं षडूनम् ॥ मासेषु सप्तदशपंचसु तुल्यमाप्तं खंडत्रयेऽपि हि फलं वद खंडसंख्याम् ॥

अर्थ—एका गृहस्थापाशीं ९४ रुपये होते ते त्यानें तीन असामींस ३ खंडे करून दरमहा दर शेंकडा ५ रु०, ३ रु०, ४ रु०, व्याजानें दिले, नंतर त्यांनीं क्रमानें ७, १०, ५ या महिन्यांनीं सारखें सारखें व्याज आणून दिलें तर खंडसंख्या काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{१ \times १००}{५ \times ७} = \frac{२०}{७}$$

$$\frac{१ \times १००}{३ \times १०} = \frac{१०}{३}$$

$$\frac{१ \times १००}{४ \times ५} = ५$$

$$\frac{२०}{७} + \frac{१०}{३} + ५ = \frac{२३५}{२१}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{२०}{७} \times \frac{२१}{२३५} \times ९४ = २४ \\ \frac{१०}{३} \times \frac{२१}{२३५} \times ९४ = २८ \\ ५ \times \frac{२१}{२३५} \times ९४ = ४२ \end{aligned}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

$$\left.\begin{aligned} क्ष &= \text{प्रथम खंड} \\ य &= \text{दुसरें खंड} \\ ज्ञ &= \text{तिसरें खंड} \end{aligned}\right\} \text{अशी कल्पना करून}$$

१०० रु. . ९ रु. व्या. ‥ क्ष रु.

१ म. . ‥ ७ म.

$$\text{प्रथम खंडाचें व्याज} = \frac{क्ष \times ७ \times ९}{१०० \times १} = \frac{क्ष}{अ}$$

$$\text{अशी संज्ञा देऊन } अ = \frac{१०० \times १}{७ \times ९} \text{ झालें.}$$

आतां १०० रु. . ३ रु. व्या. ‥ य रु.

१ म. . ‥ १० म.

$$\therefore \text{दुसऱ्या खंडाचें व्याज} = \frac{१० \times ३ \times य}{१०० \times १} = \frac{य}{ब}$$

$$\text{ही संज्ञा देऊन } ब = \frac{१०० \times १}{१० \times ३} \text{ झालें.}$$

पुनः १०० रु. . ४ रु. व्या. ‥ ज्ञ

१ म. . ‥ ९ म.

$$\therefore \text{तिसऱ्या खंडाचें व्याज} = \frac{४ \times ९ \times ज्ञ}{१०० \times १} = \frac{ज्ञ}{क}$$

अशी संज्ञा देऊन $\text{क} = \frac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{५} \times \text{४}}$ झालें.

प्रत्येक खंडाचें व्याज समान आहे.

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{य}}{\text{ब}} \quad \therefore \text{य} = \frac{\text{क्ष ब}}{\text{अ}}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{क}} \quad \therefore \text{ज्ञ} = \frac{\text{क क्ष}}{\text{अ}}$$

आणि $\text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = \text{९४}$

यांत य व ज्ञ या दोघांच्या किमती ठेवून

$$\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष ब}}{\text{अ}} + \frac{\text{क्ष क}}{\text{अ}} = \text{९४}$$

$$\therefore \text{क्ष}\left(\frac{\text{अ} + \text{ब} + \text{क}}{\text{अ}}\right) = \text{९४}$$

$$\therefore \text{क्ष} \; \frac{\text{अ}}{\text{अ} + \text{ब} + \text{क}} \times \text{९४} \; \dots\dots\dots\dots \; (\text{१})$$

ही किमत $\text{य} = \frac{\text{क्ष ब}}{\text{अ}}$ या समीकरणांत ठेवून

$$\text{य} = \frac{\text{ब}}{\text{अ} + \text{ब} + \text{क}} \times \text{९४} \; \dots\dots\dots\dots \; (\text{२})$$

आणि $\text{ज्ञ} = \frac{\text{क्ष क}}{\text{अ}}$ यांत क्ष ची किंमत ठेवून

$$\text{ज्ञ} = \frac{\text{क}}{\text{अ} + \text{ब} + \text{क}} \times \text{९४} \; \dots\dots\dots\dots \; (\text{३})$$

आतां या तिन्ही समीकरणांत अ, ब, क, यांच्या किंमती ठेवून.

$$\text{स} = \frac{\dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{७} \times \text{५}}}{\dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{७} \times \text{५}} + \dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{३} \times \text{१०}} + \dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{४} \times \text{५}}} \times \text{९४}$$

$$\text{य} = \frac{\dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{३} \times \text{१०}}}{\dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{७} \times \text{५}} + \dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{३} \times \text{१०}} + \dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{४} \times \text{५}}} \times \text{९४}$$

$$\text{ज्ञ} = \frac{\dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{४} \times \text{५}}}{\dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{७} \times \text{५}} + \dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{३} \times \text{१०}} + \dfrac{\text{१००} \times \text{१}}{\text{४} \times \text{५}}} \times \text{९४}$$

म्हणून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ताः प्रक्षेपयोगेन पृथक्फलानि ॥

अर्थ—व्यापाराकरितां अनेकांनीं घातलेलीं जीं भांडवलें त्यांस त्यांच्या बेरजेनें प्रत्येकीं भागून त्यांस मिश्रधनानें (फायद्यासह सर्वांच्या भांडवलानें) गुणिलें असतां प्रत्येकांचीं भांडवलें येतात.

उदाहरणम्—पंचाशदेकसहिता गणकाष्टषष्टिः पंचोनिता नवतिरादिधनानि येषाम् । प्राप्ता विमिश्रितधनैस्त्रिशती त्रिभिस्तैर्वाणिज्यतो वद विभज्य धनानि तेषाम् ॥

अर्थ—अ, ब, क, हे तीन असामी सर्कत वांटणीनें व्यापार करीत होते त्यांत अचे ५१ रुपये, बचे ६८ रुपये व कचे ८५ रुपये होते. व त्यांस व्यापारांत ३०० रुपये झाले तेव्हां

ते तिघांनीं वांटून घेतलें असतां कसे कसे वांटणीस येतील हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

५१ + ६८ + ८५ = २०४ हें सर्व भांडवल झालें.

$\frac{५१ \times ३००}{२०४}$ = ७५ ही अची वांटणी.

$\frac{६८ \times ३००}{२०४}$ = १०० ही बची वांटणी. हें उत्तर.

$\frac{८५ \times ३००}{२०४}$ = १२५ ही कची वांटणी.

उपपत्ति.

अ + ब + क : अ :: ३००

अ + ब + क याचे रुपयांची बेरीज = प्रक्षेपयोग

३०० = मिश्रधन

∴ अचें वांटणीस धन = $\frac{\text{अ} \times \text{मिश्रधन}}{\text{प्रक्षेपयोग}}$

याच पद्धतीनें केलें असतां

ब चें धन = $\frac{\text{ब} \times \text{मिश्रधन}}{\text{प्रक्षेपयोग}}$

क चें धन = $\frac{\text{क} \times \text{मिश्रधन}}{\text{प्रक्षेपयोग}}$

म्हणून इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

सूत्रम्—भजेच्छिदोंशैरथ तैर्विमिश्रै रूपं भजेत्स्यात्परिपूर्तिकालः ॥

अर्थ—तळीं, विहिरी, इत्यादिकांस जे झरे अगर नळ असतात त्यांनीं प्रत्येकीं भरण्यास जो काळ लागतो. त्यांच्या

छेदास त्यांच्याच अंशांनीं प्रत्येकीं भागावें. नंतर आलेल्या भागाकारांच्या बेरजेनें १ स भागिलें असतां तळावादिक भरण्याचा काळ येतो.

उदाहरणम्—ये निर्झरा दिनदिनार्धतृतीयषष्ठैः संपूरयंति हि पृथक्पृथगेव मुक्ताः ॥ वापीं यदा युगपदेव सखे विमुक्तास्ते केन वासरलवेन तदा वदाऽऽशु ॥

अर्थ—एका विहिरीस चार झरे आहेत. ते क्रमानें १ दिवस $\frac{१}{२}$ दि; $\frac{१}{३}$ दि, $\frac{१}{६}$ दि. इतक्या काळांत पाण्यानें विहीर भरतात. जर ते चारी झरे एकदम सोडले तर किती वेळांत विहीर भरेल.

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

१, २, ३, ६ या छेदांस १, १, १, १ या अंशानीं पृथग्भागून १, २, ३, ६ यांची बेरीज १२ हिनें १ स भागून $\frac{१}{१२}$ दिवस म्हणजे ५ घटका हें उत्तर.

उपपत्ति.

क्ष = काळ धरून

१ दि : १ वापी : : क्ष

∴ क्ष = पहिल्या झऱ्याचें पाणी.

$\frac{१}{२}$ दि. : १ वा : : क्ष

$\frac{क्ष}{\frac{१}{२}}$ = दुसऱ्या झऱ्याचें पाणी

$\frac{क्ष}{\frac{१}{३}}$ = तिसऱ्या झऱ्याचें पाणी

$\frac{क्ष}{\frac{१}{६}}$ = चवथ्या झऱ्याचें पाणी

$$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\frac{१}{१}} + \frac{\text{क्ष}}{\frac{१}{२}} + \frac{\text{क्ष}}{\frac{१}{३}} + \frac{\text{क्ष}}{\frac{१}{६}} = १$$

$$\text{क्ष} = \frac{१}{\frac{१}{\frac{१}{१}} + \frac{१}{\frac{१}{२}} + \frac{१}{\frac{१}{३}} + \frac{१}{\frac{१}{६}}}$$

$$\therefore \quad \text{क्ष} = \frac{१}{\frac{१}{१} + \frac{२}{१} + \frac{३}{१} + \frac{६}{१}}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—पण्यैः स्वमूल्यानि भजेत्स्वभागैर्हत्वा तदैक्येन भजेच्च तानि ॥ भागांश्च मिश्रेण धनेन हत्वा मूल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥

अर्थ—धान्यप्रमाणांनीं आपल्या किमतीस भागून आपआपल्या भागांनीं गुणून जे गुणाकार येतील त्यांच्या बेरजेनें त्या गुणाकारांस व भागांस भागिलें व मिश्रधनानें गुणिलें असतां धान्यांचीं मूल्यें व धान्यांचीं परिमाणें क्रमानें येतील.

उदाहरणम्—सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण मानाष्टकं मुद्गानां च यदि त्रयोदशमिता एता वणिक्काकिणीः ॥ आदायाऽऽर्पय तण्डुलांशयुगुलं मुद्गैकभागान्वितं क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेमहि यतः सार्थोऽग्रतो यास्यति ॥

अर्थ—एक द्रम्मास $\frac{७}{२}$ शेर तांदुळ मिळतात, व एक द्रम्मास ८ शेर मूग विकत मिळतात. तर $\frac{१३}{४}$ द्रम्म घेऊन १ भाग मूग व २ भाग तांदुळ देणें आहे तर किती घ्यावेत, व त्यांच्या किंमती काय हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{तंदुलमूल्य} = \frac{\frac{\text{स्वमूल्य}}{\text{तंदुलप्रमाण}} \times \text{तंदुलभाग}}{\frac{\text{स्वमूल्य}}{\text{तंदुलप्रमाण}} \times \text{तंदुलभाग} + \frac{\text{स्वमूल्य}}{\text{मुद्गप्रमाण}} \times \text{मुद्गभाग}} \text{ मिश्रधनें}$$

या सारणींमध्यें उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून.

$$\text{तंदुलमूल्य} = \frac{\frac{१}{\frac{७}{२}} \times २}{\frac{१}{\frac{७}{२}} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४}$$

$$= \frac{\frac{४}{७}}{\frac{४}{७} + \frac{१}{८}} \times \frac{१३}{६४} = \frac{१}{६} \text{ द्रम्म हें उत्तर.}$$

$$\text{मुद्गमूल्य} = \frac{\frac{१}{८} \times १}{\frac{१}{\frac{७}{२}} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४} = \frac{७}{१९२} \text{ द्रम्म हें उत्तर.}$$

$$\text{तांदुळ} = \frac{२}{\frac{१}{\frac{७}{२}} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४} = \frac{७}{१२} \text{ शेर हें उत्तर.}$$

$$\text{मूग} = \frac{१}{\frac{१}{\frac{७}{२}} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४} = \frac{७}{२४} \text{ शेर हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

क्ष = मूग धरूं

$\therefore$ २ क्ष = तांदूळ झालें.

$\frac{७}{२}$ शेर : १ द्रम्म :: २ क्ष

$\therefore \frac{२\text{ क्ष}}{\frac{७}{२}} = \text{तंदुल मौल्य}$

आणि ८ शेर : १ द्रम्म :: क्ष

$\therefore \frac{\text{क्ष}}{\text{८}} = $ मुद्ग मौल्य.

आतां तंदुलमूल्य व मुद्गमूल्य $\frac{\text{१३}}{\text{६४}}$ द्रम्म आहे, असें उदाहरणांत सांगितलें

$$\therefore \frac{\text{२ क्ष}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} + \frac{\text{क्ष}}{\text{८}} = \frac{\text{१३}}{\text{६४}}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\frac{\text{१३}}{\text{६४}}}{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२} + \frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}} \quad \text{हे मूग.}$$

$$\therefore \text{२ क्ष} = \frac{\text{२}}{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२} + \frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}} \times \frac{\text{१३}}{\text{६४}} \quad \text{हे तांदूळ}$$

$$\frac{\text{७}}{\text{२}} \text{ शेर : १ द्रम्म ::} \frac{\text{२}}{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२} + \frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}} \times \frac{\text{१३}}{\text{६४}}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२}}{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२} + \frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}} \times \frac{\text{१३}}{\text{६४}} = \text{तंदुलमूल्यम्}$$

$$\text{८ शेर : १ द्रम्म ::} \frac{\frac{\text{१३}}{\text{६४}}}{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२} + \frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}}{\frac{\text{१}}{\frac{\text{७}}{\text{२}}} \times \text{२} + \frac{\text{१}}{\text{८}} \times \text{१}} \times \frac{\text{१३}}{\text{६४}} = \text{मुद्गमूल्यम्}$$

म्हणून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—कर्पूरस्य वरस्य निष्कयुगलेनैकं पलं प्राप्यते वैश्यानंदनचंदनस्य च पलं द्रम्माष्टभागेन चेत् ॥ अष्टांशेन तथाऽगरोः पलदलं निष्केण मे देहि तान्भागैरेककषोडशाष्टकमितैर्धूपं चिकीर्षाम्यहम् ॥

अर्थ— २ निष्कांस उत्तम कापूर एक पल मिळतो, $\frac{१}{८}$ द्रमास १ पल चंदन मिळतो, व $\frac{१}{८}$ द्रम्मास $\frac{१}{२}$ पल अगरु मिळतो. तर १ निष्कामध्यें ते तिन्ही पदार्थ १, १६, ८ अनुक्रमें अशा भागांनीं घ्यावयाचे ते किती किती येतील व त्यांच्या प्रत्येकांच्या किमती काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

२ निष्क × १६ = ३२ द्रम्म.

१ निष्क = १६ द्रम्म. मिश्रधन

$$\text{कापराची किंमत} = \frac{\frac{३२}{१} \times १}{\frac{३२ \times १}{१} + \frac{१}{८} \times १६ + \frac{१}{८} \times ८} \times १६$$

$= १४\frac{२}{९}$ द्रम्म हें उत्तर.

तसेंच मागच्या उदाहरणाच्या पद्धतीनें अन्य किंमती काढून

चंदनाची किंमत = $\frac{८}{९}$ द्रम्म हें उत्तर.

अगरूची किंमत = $\frac{८}{९}$ द्रम्म हें उत्तर.

कापूरपल $\frac{४}{९}$; चंदनपल $\frac{१}{९}$; अगरुपल $\frac{५}{९}$; हें उत्तर.

सूत्रम्—नरघ्नदानोनितरत्नशेषैरिष्टे हृते स्युः खलु मूल्यसंख्याः ॥ शेषैर्हृते शेषवधे पृथक्स्थैरभिन्नमूल्यान्यथवा भवन्ति ॥

अर्थ—मनुष्यसंख्येनें रत्नदानसंख्येस गुणून तो गुणाकार भिन्न भिन्न रत्नांतून वजा करावा. ज्या बाक्या राहतील

त्यांनीं कल्पित इष्टसंख्येस भागिलें असतां भिन्न जातीच्या रत्नाच्या किंमती येतील.

अथवा वरील रीतींत सांगितल्याप्रमाणें बाक्या काढून त्यांचा परस्पर गुणाकार करून त्यास त्या निरनिराळ्या बाक्यांनीं भागिले असतां पूर्णांकात्मक रत्नांच्या किमती येतात.

उदाहरणम्—माणिक्याष्टकमिंद्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं सद्वज्राणि च पंचरत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनम् ॥ संगस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्वैकमेकं मिथो जातास्तुल्यधनाः पृथग्वद सखे तद्रत्नमूल्यानि मे ॥

अर्थ—एका शहरामध्यें चार गृहस्थ होते, त्यांपैकीं एका जवळ ८ माणिक्यें, दुसऱ्या जवळ १० नीळ, तिसऱ्यापाशीं १०० मुक्ताफलें, व चवथ्यापाशीं ५ वज्र होते. त्यांनीं आपआपल्या रत्नांपैकीं एकेक रत्न प्रत्येकास देऊन ते तुल्यधन झालें तर त्या रत्नाच्या किंमती काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें रत्नसंख्या ८, १०, १००, ५ दान संख्या १ व मनुष्य संख्या ४ आहे.

$$८ - ४ \times १ = ४$$
$$१० - ४ \times १ = ६$$
$$१०० - ४ \times १ = ९६$$
$$५ - ४ \times १ = १$$

आतां इष्ट संख्या ९६ धरून

$\frac{९६}{४} = २४$ दर माणिक्याची किंमत
$\frac{९६}{६} = १६$ .... नीळाची ....
$\frac{९६}{९६} = १$ .... मोत्याची ....
$\frac{९६}{१} = ९६$ .... वज्राची ....

} हें उत्तर.

दुसऱ्या रीतीनें उदाहरण सोडवूं.

पहिल्या रीतीनें निघालेल्या बाक्या ५, ६, ९६, १ यांचा परस्पर गुणाकार २३०४ यास प्रत्येक बाकीनें भागून ५७६, ३८४, २४, २३०४ याप्रमाणें क्रमानें माणिक्य, नील, मोतीं, वज्र यांच्या किंमती झाल्या हें उत्तर.

उपपत्ति.

मा = माणिकाची किंमत ⎫
नी = नीलाची " ⎬ धरून
मु = मोत्याची " ⎪
व = वज्राची " ⎭

आणि ८ = अ
१० = ब
१०० = क
१ = ड

अशा संज्ञा देऊन

१ माणि० : मा किंमत :: (अ – ३) माणि.

∴ (अ – ३) मा = ही किंमत माणिकवाल्यापाशीं एकेक माणिक प्रत्येकास अशीं तीन माणकें देऊन जी शिल्लक राहिली त्यांची समजा.

अशीच त्रैराशिकें करून

(ब – ३) नी = दुसऱ्याच्या रत्नाची किंमत

(क – ३) मु = तिसऱ्याच्या "

(ड – ३) व = चवथ्याच्या "

आतां या प्रत्येकांच्या रत्नांच्या किंमतीमध्यें मिळालेल्या तीन तीन रत्नांच्या किंमती मिळविल्यानें साम्यता होईल.

$$(\text{अ}-३)\,\text{मा} + \text{नी} + \text{व} + \text{मु} = (\text{ब}-३)\,\text{नी} + \text{मा} + \text{ब} + \text{मु}.$$

$$\therefore \quad \text{नी} = \left(\frac{\text{अ} - ४}{\text{ब} - ४}\right)\text{मा} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$(\text{ब}-३)\,\text{नी} + \text{मा} + \text{व} + \text{मु} = (\text{क}-३)\,\text{मु} + \text{नी} + \text{व} + \text{मा}$$

$$\therefore \quad \text{मु} = \left(\frac{\text{अ} - ४}{\text{क} - ४}\right)\text{मा} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$(\text{क}-३)\,\text{मु} + \text{नी} + \text{व} + \text{मा} = (\text{ड}-३)\,\text{व} + \text{नी} + \text{मा} + \text{मु}$$

$$\therefore \quad \text{व} = \left(\frac{\text{अ} - ४}{\text{ड} - ४}\right)\text{मा} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

वरील तीन समीकरणांवरून असें दिसून येईल, कीं माणिक्याची कोणतीही इष्टसंख्या धरिली असतां त्याच्या तितक्या तितक्या पट किंमती नीळादिकांच्या निघतील. करितां माणिक्याची किंमत $\frac{\text{इष्ट}}{\text{अ} - ४ \times १}$ धरून ही किंमत सर्वांत ठेवतों.

$$\therefore \quad \text{मा} = \frac{\text{इष्ट}}{\text{अ} - ४ \times १}$$

$$\therefore \quad \text{नी} = \frac{\text{इष्ट}}{\text{ब} - ४ \times १}$$

$$\therefore \quad \text{मु} = \frac{\text{इष्ट}}{\text{क} - ४ \times १}$$

$$\therefore \quad \text{व} = \frac{\text{इष्ट}}{\text{ड} - ४ \times १}$$

अथवा माणिक्याची इष्ट किंमत

$$\frac{(\text{अ} - ४)(\text{ब} - ४)(\text{क} - ४)(\text{ड} - ४)}{\text{अ} - ४}$$ ही धरून

बाकी सर्वांच्या किंमतींत ठेवून

$$मा = \frac{(अ - ४)(ब - ४)(क - ४)(ड - ४)}{अ - ४}$$

$$नी = \frac{(अ - ४)(ब - ४)(क - ४)(ड - ४)}{ब - ४}$$

$$मु = \frac{(अ - ४)(ब - ४)(क - ४)(ड - ४)}{क - ४}$$

$$व = \frac{(अ - ४)(ब - ४)(क - ४)(ड - ४)}{ड - ४}$$

म्हणून सर्वेष्ट सिद्धि झाली.

सूत्रम्—सुवर्णवर्णाहतियोगराशौ स्वर्णैक्यभक्ते कनकैक्यवर्णः ॥ वर्णो भवेच्छोधितहेमभक्ते वर्णोद्धृते शोधितहेमसंख्या ॥

अर्थ—सोनें व त्याचा कस यांचा पृथक् पृथक् गुणाकार करून त्या गुणाकारांच्या बेरजेस सुवर्णैक्यानें भागिलें असतां मिश्रवर्ण येतो; व शोधित सुवर्णानें भागिलें असतां शुद्ध सोन्याचा कस येतो; व कसानें भागिलें असतां शुद्ध सोनें येतें.

उदाहरणम्—विश्वार्करुद्रदशवर्णसुवर्णमाषा दिग्वेदलोचनयुगप्रमिताः क्रमेण ॥ आवर्तितेषु वद तेषु सुवर्णवर्णस्तूर्णं सुवर्णगणितज्ञ वणिग्भवेत्कः ॥ ते शोधनेन यदि विंशतिरुक्तमाषाः स्युः षोडशद्रविणवर्णमितिस्तदा का ॥ चेच्छोधितं भवति षोडशवर्णहेम ते विंशतिः कति तदा तु भवन्ति माषाः ॥

अर्थ—१३ कसाचे १० मासे सोनें, १२ कसाचे ४ मासे,

११ कसाचे २ मासे, १० कसाचे ४ मासे. याप्रमाणें सोनें आहे हें एकत्र आटविलें असतां जें सोनें होईल त्याचा कस काय ? व ते २० मासे मिश्रसोनें शुद्ध केलें असतां १६ मासे होतात तर त्या सोन्याचा कस काय ? व तें मिश्रसोनें शुद्ध केलें असतां जर १६ कस लागतो तर २० मासे सोनें वजनानें किती मासे भरेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{मिश्रवर्ण} = \frac{१३ \times १० + १२ \times ४ + ११ \times २ + १० \times ४}{१० + ४ + २ + ४}$$

$$= \frac{२४०}{२०} = १२ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{शुद्ध सोन्याचा कस} = \frac{२४०}{१६} = १५ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{सोन्याचें वजन} = \frac{२४०}{१६} = १५ \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

क्ष = मिश्रवर्ण धरून

१३ वर्ण : १० मासे :: क्ष वर्ण. व्यस्त त्रैराशिक

$$\text{क्ष वर्णाचे माष} = \frac{१३ \times १०}{\text{क्ष}}$$

याच पद्धतीनें सर्वांचे माष करून

$$\frac{१३\times१०}{\text{क्ष}} + \frac{१२\times४}{\text{क्ष}} + \frac{११\times२}{\text{क्ष}} + \frac{१०\times४}{\text{क्ष}} = २०$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{१३\times१०+१२\times४+११\times२+१०\times४}{२०}$$

∴ मिश्रवर्णाच्या रीतीची सिद्धि झाली.

आतां शुद्ध सोन्याचा वर्ण (कस) = क्ष धरून पूर्व पद्धतीनेंच कृति करून

$$\frac{१३\times१०}{क्ष} + \frac{१२\times४}{क्ष} + \frac{११\times२}{क्ष} + \frac{१०\times४}{क्ष} = १६$$

$$\therefore क्ष = \frac{२४०}{१६}$$

म्हणून शुद्ध सोन्याच्या कसाच्या रीतीची सिद्धि झाली.

तसेंच क्ष = माष धरून

पूर्व क्रिया करून

$$क्ष = \frac{१३\times१० + १२\times४ + ११\times२ + १०\times४}{१६}$$

$\therefore$ सर्व इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—स्वर्णैक्यनिघ्नाद्युतिजातवर्णात्सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात् ॥ अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाऽऽप्तमज्ञातवर्णस्य भवेत्प्रमाणम् ॥

अर्थ—सोन्याच्या वजनांच्या बेरजेनें मिश्रसोन्याचे कसास गुणून त्यांतून, सोन्याचीं वजनें व त्यांचे कस यांच्या गुणाकारांची बेरीज वजा करून बाकीस ज्याचा कस अज्ञात आहे अशा सोन्याच्या वजनानें भागिलें असतां अज्ञात कसाचें प्रमाण येतें.

उदाहरणम्—दशेशवर्णा वसुनेत्रमाषा अज्ञातवर्णस्य षडेतदैक्ये ॥ जातं सखे द्वादशकं सुवर्णमज्ञातवर्णस्य वद प्रमाणम् ॥

अर्थ—१० कसाचें सोनें ८ मासे, ११ कसाचें २ मासे,

व अज्ञात कसाचे ६ मासे; हीं तिन्हीं एकत्र करून मिश्र सोन्याचा कस १२ झाला तर ज्याचा कस माहीत नाहीं असे ६ मासे सोनें किती कशी होतें हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

८, २, ६ यांची बेरीज १६ यास १२ नीं गुणून १९२ यांतून सोन्याचीं वजनें व त्यांचे कस यांच्या गुणाकारांची बेरीज १०२ वजा करून शेष ९० राहिले यांस ६ नीं भागून १५ कस आला हें उत्तर.

उपपत्ति.

मागच्या सूत्रावरून

$$\text{मिश्रवर्ण} = \frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोग}}{\text{स्वर्णैक्य}}$$

$$\therefore \text{मिश्रवर्ण} \times \text{स्वर्णैक्य} = \text{सुवर्णवर्णाहतियोग}$$

$$\text{वर्ण} \times \text{स्वर्णैक्य} = १० \times ८ + ११ \times २ + \text{अज्ञातवर्ण} \times ६$$

$$\therefore \text{अज्ञातवर्ण} = \frac{\text{व} \times \text{स्व.} - (१० \times ८ + ११ \times २)}{६}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—स्वर्णैक्यनिघ्नो युतिजातवर्णः स्वर्णघ्नवर्णैक्य-वियोजितोऽसौ ॥ अहेमवर्णाग्निजयोगवर्णविश्लेषभक्तोऽविदिताग्निजं स्यात् ॥

अर्थ—मिश्रणापासून उत्पन्न झालेल्या कसास सोन्याच्या वजनांच्या बेरजेनें गुणून त्यांतून, सोन्याचीं वजनें व कस यांच्या गुणाकारांची बेरीज वजा करून बाकीस, अज्ञातसोन्याचा कस व मिश्रकस यांच्या अंतरानें भागिलें असतां अज्ञात सोन्याचें मान समजतें.

उदाहरणम्—दशेंद्रवर्णा गुणचंद्रमाषाः किंचित्तथा षोडशकस्य तेषाम् ॥ जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णं कतीह ते षोडशवर्णमाषाः ॥

अर्थ—१० व १४ कशी सुवर्ण क्रमानें ३ व १ मासा, व १६ कशी सुवर्ण कांहीं मासे होते. हीं एकत्र करून १२ कशी सोनें झालें तर यांत १६ कशी सोनें किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{अज्ञात सोन्याचें मान} = \frac{१२(३+१)-(१०\times३+१४\times१)}{१६-१२}$$

$$\text{अज्ञात सोनें} = \frac{४८-(३०+१४)}{४}$$

$\therefore$ अज्ञात सोनें = १ मासा हें उत्तर.

उपपत्ति.

क्ष = अज्ञात सुवर्णाचें मान धरून

$$\text{मिश्रवर्ण} = \frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोग}}{\text{स्वर्णैक्य}}$$

या सारणीमध्यें उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून.

$$१२ = \frac{१०\times३+१४\times१+१६\times\text{क्ष}}{३+१+\text{क्ष}}$$

$$\therefore १२\times३+१२\times१+१२\times\text{क्ष}=१०\times३+१४\times१+१६\text{क्ष}$$

$$\therefore १६\text{क्ष}-१२\text{क्ष}=१२(३+१)-(१०\times३+१४\times१)$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{१२(३+१)-(१०\times३+१४\times१)}{१६-१२}$$

$$\therefore क्ष = \frac{\text{युतिवर्णैक्य} \times \text{स्वर्णैक्य} - \text{स्वर्णघ्नवर्णैक्य}}{\text{अहेमवर्णाग्निजवर्ण} - \text{युतिवर्ण}}$$

इष्ट सिद्धि झाली.

सूत्रम्—साध्येनोनोऽनल्पवर्णो विधेयः साध्यो व[...] स्वल्पवर्णोनितश्च । इष्टक्षुण्णे शेषके स्वर्णमाने स्यातां [...] ल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ॥

अर्थ—मोठ्या कसांतून साध्य म्हणजे मिश्र कस [...] करावा. आणि मिश्र कसांतून त्यापेक्षां लहान कस वजा कर[...] नंतर ज्या बाक्या राहतील त्यांस कल्पित इष्ट संख्येनें गुणि[...] असतां क्रमानें लहान व मोठ्या कसाच्या सोन्याचीं वजनें येत[...]

उदाहरणम्—हाटकगुटिके षोडश दशवर्णे तद्युतौ स[...] जातम् । द्वादशवर्णसुवर्णं ब्रूहि तयोः स्वर्णमाने मे ॥

अर्थ—सोन्याच्या २ गोळ्या १६ व १० कशी आ[...] त्या एकत्र करून त्या सोन्यास १२ कस लागला तर त्या[...] वजनें काय हें सांग ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

मोठा कस १६ यांतून मिश्रकस १२ वजा करून ४ बाकी, व [...] कसांतून लहान कस १० वजा करून बाकी २ राहिली. या बाक[...] इष्ट १ यानें गुणिलें असतां ४ व २ मासे हें उत्तर याप्रमाणें अ[...] उत्तरें इष्टानें येतील.

उपपत्ति.

क्ष = १६ कशी सोनें, आणि

य = १० कशी सोनें धरून

$$\text{मिश्रवर्ण} = \frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोग}}{\text{स्वर्णैक्य}}$$

या सारणींत किंमती ठेवून.

$$१२ = \frac{१६ क्ष + १० य}{क्ष + य}$$

$$\therefore \quad १२ क्ष + १२ य = १६ क्ष + १० य$$

$$१६ क्ष - १२ क्ष = १२ य - १० य$$

$$\therefore \quad क्ष = \frac{१२ य - १० य}{१६ - १२} = \frac{१२ - १०}{१६ - १२} य$$

येथें $\frac{य}{१६-१२}$ = इष्ट धरून.

क्ष = (१२ − १०) इष्ट; य = (१६ − १२) इष्ट.

∴ इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—एकाद्येकोत्तरा अंका व्यस्ता भाज्याः क्रमस्थितैः। परः पूर्वेण संगुण्य तत्परस्तत्परेण च॥ एकद्वित्र्यादिभेदाः स्युरिदं साधारणं स्मृतम्॥ छंदश्चित्युत्तरेछंदस्युपयोगोऽस्य तद्विदाम्। मुखावाहनभेदादौ खंडमेरौ च शिल्पके। वैद्यके रसभेदीये तन्नोक्तं विस्तृतेर्भयात्।

अर्थ—वस्तुसंख्येंतून अमुक वस्तु प्रत्येक वेळा घेऊन संयोग किती होतील हें काढावयाचें असल्यास वस्तुसंख्येस १ नें भागावें, वस्तु संख्येंत १ कमी करून २ नें भागावें, वस्तु संख्येंत २ कमी करून ३ नें भागावें. वस्तुसंख्येंत ३ कमी करून ४ नें भागावें. इत्यादि क्रिया प्रत्येक वेळां जितक्या वस्तु घ्यावयाच्या असतील तत्संख्यांक करावी नंतर आलेल्या भागाकारांचा परस्पर गुणाकार केला असतां संयोग होतात.

छंदाचा विस्तार करणें, गवाक्षरचनाभेद, तालप्रस्तार, रसभेद इत्यादिकांचे ठिकाणीं विशेष उपयोग आहे तथापि विस्तार भयास्तव विशेष प्रकार न सांगतां साधारण रीति सांगितली आहे.

उदाहरणम्—प्रस्तारे मित्र गायत्र्याः स्युः पादे व्यक्तयः कति । एकादिगुरवश्चाऽऽशु कथ्यतां तत्पृथक्पृथक् ॥

अर्थ—६ अक्षरी गायत्री छंदांत एकेक गुरु अक्षर घेऊन, दोन दोन अक्षरें घेऊन, तीन तीन घेऊन चार चार, पांच पांच, सहा सहा, घेऊन भेद किती किती होतील ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{६}{१}$ = ६ एकेक अक्षर घेऊन होणारे भेद.

$\frac{६}{१} \times \frac{५}{२}$ = १५ दोन दोन अक्षरांचे संयोग.

$\frac{६}{१} \times \frac{५}{२} \times \frac{४}{३}$ = २० तीन तीन ,, ,,

$\frac{६}{१} \times \frac{५}{२} \times \frac{४}{३} \times \frac{३}{४}$ = १५ चार चार ,, ,,

$\frac{६}{१} \times \frac{५}{२} \times \frac{४}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{२}{५}$ = ६ पांच पांच ,, ,,

$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २ \cdot १}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६}$ = १ सहा सहा ,, हें उत्तर.

उदाहरणम्—एकद्वित्र्यादिमूषा वहनमितिमहो ब्रूहि मे भूमिभर्तुर्हर्म्ये रम्येऽष्टमूषे चतुरविरचिते श्लक्ष्णशालाविशाले । एकद्वित्र्यादियुक्त्या मधुरकटुकषायाम्लकक्षारातिक्तैरेकस्मिन्षड्रसैःस्युर्गणक कति वद व्यंजने व्यक्तिभेदाः

अर्थ—एका राजवाड्यास ८ दरवाजे होते त्यांतून एकेक, दोन दोन इत्यादि दरवाजे बंद करून वाड्याचे जे जे भेद होतील ते सांग ? व मधुर, कटु, कषाय, अंबट, क्षार, तिक्त, या सहां रसांपैकीं एकेक, दोन दोन, इत्यादि रस घेऊन चटण्या किती किती तऱ्हेच्या होतील हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{८}{१}$ = ८ एकेक दरवाजा उघडा ठेवून

$\frac{८ \cdot ७}{१ \cdot २}$ = २८ दोन दोन „ होणारे भेद.

$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६}{१ \cdot २ \cdot ३}$ = ५६ तीन तीन „ „

$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४}$ = ७० चार चार „ „

$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५}$ = ५६ पांच पांच „ „

$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६}$ = २८ सहा सहा „ „

$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६ \cdot ७}$ = ८ सात सात „ „

$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २ \cdot १}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६ \cdot ७ \cdot ८}$ = १ आठ आठ „ „ हें उत्तर.

$\frac{६}{१}$ = ६ एकेक रस घेऊन होणारे चटणीचे भेद.

$\frac{६ \cdot ५}{१ \cdot २}$ = १५ दोन दोन „ „ „

$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४}{१ \cdot २ \cdot ३}$ = २० तीन तीन „ „ „

$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४}$ = १५ चार चार „ „ „

$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५}$ = ६ पांच पांच „ „ „

$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २ \cdot १}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६}$ = १ सहा सहा „ „ हें उत्तर.

उपपत्ति.

दिलेल्या वस्तूंतून प्रत्येक वेळीं कांहीं नियत वस्तु घेऊन त्याची उलट पालट करण्यानें जे भेद होतात त्यांस विपर्यय असें म्हण-

तात. जसें अ, ब, क, ह्या तीन वस्तूंपैकीं प्रत्येक वेळा दोन दोन वस्तु घेऊन अ ब, ब अ, अ क, क अ, ब क, क ब असे ६ विपर्यय होतात.

दिलेल्या वस्तूंतून प्रत्येक वेळीं कांहीं नियत वस्तु घेऊन क्रमाकडे लक्ष्य न देतां जे भेद होतात त्यांस संयोग असें म्हणतात. जसें अ, ब, क, ह्या तीन वस्तूंपैकीं प्रत्येक वेळां दोन दोन वस्तु क्रमाकडे लक्ष्य न देतां घेऊन अ ब, अ क, ब क, असे तीन संयोग होतात.

येथें अ ब, आणि ब अ असें दोन विपर्यय होतात तथापि क्रमाकडे लक्ष्य न दिल्यामुळें संयोग एकच होतो.

प्रथम वस्तु विपर्यय याविषयीं नियम काढूं, कल्पना करा कीं, अ, ब, क, ड इत्यादि न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां र वस्तु घेऊन विपर्यय काढावयाचे आहेत; जर दोन दोन वस्तु घेऊन भेद केले तर न (न–१) इतके विपर्यय होतील. कारण; ब, क, ड इत्यादि न वस्तूंच्या मागें अ वस्तु जोडिल्यानें (न–१) इतके भेद अ आहे आरंभीं ज्यांच्या असे झाले. तसेंच ब जोडिल्यानें आरंभीं ज्यांच्या ब आहे असे भेद (न–१) इतके होतील. तसेंच क जोडिल्यानें (न–१) इतके होतील. असेंच पुढें केल्यानें सर्व भेद न (न–१) इतके विपर्यय दोन दोन वस्तु संबंधानें होतील.

आतां तीन तीन वस्तु घेऊन विपर्यय करूं; प्रथम ब, क, ड, इत्यादि (न–१) वस्तूंचे मागील नियमाप्रमाणें दोन दोन वस्तु घेऊन (न–१) (न–२) इतके विपर्यय होतात. यांच्या मागें अ जोडिल्यानें (न–१) (न–२) इतके विपर्यय अ आरंभीं आहे ज्यांच्या अशा तीन तीन वस्तूसंबंधानें झालें.

तसेंच व प्रारंभींचे (न−१) (न−२) इतके तीन तीन वस्तु संबंधानें झालें. याचपद्धतीनें पुढेंही करीत गेले असतां न (न−१) (न−२) इतके विपर्यय तीन तीन वस्तुसंबंधानें होतील— यावरून खालील नियम सहज लक्ष्यांत येईल.

न (न−१) (न−२) .... (न− (र−१))

ही सारणी न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां र वस्तु घेतल्या असतां विपर्यय येण्याची झाली.

येथें न बरोबर र असेल तर वरील सारणीचे स्वरूप

न (न−१) (न−२) (न−३) २. १

असें होतें. यास |न अशी खूण करितात म्हणजे १. २. ३. इत्यादि न संख्यांचा गुणाकार समजावा.

आतां र वस्तूंचा कोणताही एखादा संयोग घेऊन याचे विपर्यय केले असतां |र इतके होतात.

∴ न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां र वस्तु घेऊन त्यांचे संयोग =

$$\frac{\text{न (न − १) (न − २)........(न − र + १)}}{|\text{र}}$$

इतके होतील हें उघड आहे.

येथें न = ६ व र = १ धरून संयोग = $\frac{६}{१}$

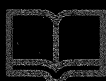
न = ६ व र = २ धरून

$$\text{संयोग} = \frac{६ \times ५}{१ \times २}$$

न = ६ व र = ३ धरून

$$\text{संयोग} = \frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३}$$

न = ६ व र = ६ धरून



$$\text{संयोग} = \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६}$$

म्हणून संपूर्ण सूत्रसिद्धि झाली.

याप्रमाणें मिश्रव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

श्रेढीव्यवहार.

श्लोक—सैकपदघ्नपदार्धमथैकाद्यंकयुतिः किल संकलिताख्या ॥ साद्वियुतेन पदेन विनिघ्नी स्यात्त्रिहृता खलु संकलितैक्यम् ॥

अर्थ—पद संख्येमध्यें एक मिळवून जी संख्या होईल तिनें पदसंख्येच्या अर्धास गुणिलें असतां विवक्षित एकादि अंकांची बेरीज होते. या बेरजेस संकलित असें म्हणतात.

पद संख्येमध्यें दोन मिळवून जी संख्या होईल तिनें संकलितास गुणून ३ या संख्येनें भागिलें असतां संकलितांची बेरीज होते. या बेरजेस संकलितैक्य असें म्हणतात.

उदाहरणम्—एकादीनां नवांतानां पृथक्संकलितानि मे ॥ तेषां संकलितैक्यानि प्रचक्ष्व गणक द्रुतम् ॥

अर्थ—एकादि नवांत संख्यांचीं संकलितें पृथक् पृथक् सांग? आणि त्यांचीं संकलितैक्येंही सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम १, २, ३, ४, ५ या संख्यांची बेरीज करूं. येथें पदसंख्या ५ यांत १ मिळवून ६ यानें पदार्धास $\frac{५}{२}$ गुणून १५ हें एकादि पंचांकांचें संकलित झालें. तसेंच एकादि नवांत संख्येचें संकलित करीत असतां पदसंख्या ९ यांत १ मिळवून १० यानें पदार्धास $\frac{९}{२}$ गुणून ४५ हें उत्तर. याप्रमाणेंच अन्य उत्तरें काढावीं.

आतां एकादिनवांत संकलितांची बेरीज करूं. येथें पदसंख्या ९ यांत २ मिळवून ११ यानें एकादिनवांत संख्यांच्या संकलितास ४५ गुणून ४९५ झाले यांस ३ नें भागून १६५ हें संकलितैक्य झालें. याचप्रमाणें अन्य संकलितैक्यांचीं उत्तरें काढावींत.

उपपत्ति.

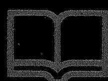
१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ या एकादिनवांत संख्यांचीं बेरीज करणें म्हणजे सर्वधन काढणें हा अर्थ होय. कारण येथें आदि १, चय (उत्तर) १ आणि पद म्हणजे गच्छ ९ आहे. व अंत्यधन ९ च आहे.

अव्यक्त पद्धतीनें श्लोकांत दिलेली रीति उत्पन्न होण्याकरितां कल्पना करा कीं,

प्रथम दिवशीं दिलेलें द्रव्य	आ
दुसरे दिवशीं..............	आ + उ
तिसरे....................	आ + २ उ
चवथे..........................	आ + ३ उ
पांचवे..........................	आ + ४ उ
न संख्याक दिवशीं...........	आ + (न−१) उ

∴ अंत्यधन = आ + (न−१) उ......... (१)

सर्वधन = आ + (आ + उ) + (आ + २ उ) + ...



..................(अं − २ उ) + (अं − उ) + अंत्य.

याच समीकरणांतील पदें उलट मांडून

सर्वधन = अं + (अं − उ) + (अं − २ उ)......

........+ (आ + २ उ) + (आ + उ) + आ.

या दोन समीकरणांच्या बेरजेवरून

२ सर्वधन = (आ + अं) + (आ + अं).. (आ+अं)

∴ २ स = (आ + अं) गच्छ

$$\therefore \quad स = \frac{(आ + अं)\ गच्छ}{२} \quad ....(२)$$

आतां संकलिताचे उदाहरणामध्यें अंत्यधन व गच्छ किमतीनें तुल्य असल्यामुळें त्या दोघांस पद अशी संज्ञा दिली आहे; व आदि १ असतो म्हणून मागील समीकरणाचें स्वरूप

$$संकलित = (१ + पद) \frac{पद}{२} \quad असें\ झालें........ (३)$$

म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

आतां संकलितैक्याच्या सारणीची उपपत्ति करूं.

$$न^३ - (न - १)^३ = ३ न^२ - ३ न + १$$

$$(न - १)^३ - (न - २)^३ = ३ (न - १)^२ - ३ (न - १) + १$$

$$(न - २)^३ - (न - ३)^३ = ३ (न - २)^२ - ३ (न - २) + १$$

$$(न - ३)^३ - (न - ४)^३ = ३ (न - ३)^२ - ३ (न - ३) + १$$

$$(न - ४)^३ - (न - ५)^३ = ३ (न - ४)^२ - ३ (न - ४) + १$$

....

....

$$(४)^३ - (३)^३ = ३(४)^२ - ३(४) + १$$

$$(३)^३ - (२)^३ = ३(३)^२ - ३(३) + १$$

$$(२)^३ - (१)^३ = ३(२)^२ - ३(२) + १$$

$$(१)^३ - (०)^३ = ३(१)^२ - ३(१) + १$$

या सर्वांच्या बेरजेवरून

$$न^३ = ३(१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२ + ५^२ \ldots\ldots न^२)$$

$$- ३(१ + २ + ३ + ४ + ५ \ldots\ldots न) + न$$

$\therefore न^३ = ३$ वर्गैक्य-३ संकलित $+ न$ यांत समीकरण

(३) मधील संकलिताची किंमत ठेवून

$$न^३ = ३ \text{ वर्गैक्य} - ३\,\frac{न(न+१)}{२} + न$$

$$\therefore ३ \text{ वर्गैक्य} = न^३ + ३\,\frac{न(न+१)}{२} + न$$

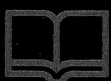
$$\therefore व = \frac{२न^३ + ३न^२ + ३न - २न}{२ \times ३}$$

$$= \frac{२न^३ + ३न^२ + न}{६}$$

$$= \frac{न(२न^२ + ३न + १)}{६}$$

$$= \frac{न(न+१)(२न+१)}{६}$$

$$\therefore \text{वर्गैक्य} = \frac{२न+१}{३} \times \frac{न(न+१)}{२}$$



$\therefore$ व = $\frac{२ न + १}{३}$ × संकलित................ (४)

आतां संकलित = $\frac{न (न + १)}{२} = \frac{न^{२}}{२} + \frac{न}{२}$

या सारणीवरून एकादिकांचीं संकलितें लिहून दाखवितों.

संख्या १ चें संकलित = $\frac{१^{२}}{२} + \frac{१}{२}$

...... २ चें .... = $\frac{२^{२}}{२} + \frac{२}{२}$

...... ३ चें .... = $\frac{३^{२}}{२} + \frac{३}{२}$

...... ४ चें .... = $\frac{४^{२}}{२} + \frac{४}{२}$

....

....

संख्या न चें संकलित = $\frac{न^{२}}{२} + \frac{न}{२}$

या सर्वांच्या बेरजेवरून

संकलितैक्य = $\left(\frac{१^{२}}{२} + \frac{१}{२}\right) + \left(\frac{२^{२}}{२} + \frac{२}{२}\right)$

$+ \left(\frac{३^{२}}{२} + \frac{३}{२}\right) .... \left(\frac{न^{३}}{२} + \frac{न}{२}\right)$

$\therefore$ संकलितैक्य = $\frac{१^{२} + २^{२} + ३^{२} + ४^{२} + ... + न^{२}}{२}$

$$+\frac{१+२+३+\dots+न}{२}$$

$$=\frac{\text{वर्गैक्य}}{२}+\frac{\text{संकलित}}{२}$$

यांत समीकरण (४) मधील वर्गैक्याची किंमत ठेवून

$$\text{संकलितैक्य}=\frac{\frac{२न+१}{३}\,\text{सं}}{२}+\frac{\text{सं}}{२}$$

$$=\frac{\text{सं}}{२}\left(\frac{२न+१}{३}+१\right)$$

$$=\frac{\text{सं}}{२}\left(\frac{२न+४}{३}\right)$$

$$=\frac{\text{सं}}{२}+\frac{२}{३}(न+२)$$

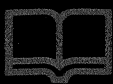
$$=\frac{न+२}{३}\,\text{संकलित}$$

म्हणून उत्तरार्धाची इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तं संकलितेन हतं कृतियोगः ॥ संकलितस्य कृतेः सममेकाद्यंकघनैक्यमुदाहृतमाद्यैः ॥

अर्थ—पदसंख्येच्या दुपटीमध्यें एक मिळवून ३ नें भागावें. नंतर आलेल्या भागाकारास संकलितानें गुणिलें असतां विवक्षित व क्रमिक अशा एकादि संख्यांच्या वर्गांचा योग (बेरीज) होतो.

34



संकलिताचा वर्ग केला असतां एकादि संख्यांच्या घनांची बेरीज होते.

उदाहरणम्—तेषामेव च वर्गैक्यं घनैक्यं च वद द्रुतम् ॥ कृतिसंकलनामार्गे कुशला यदि ते मतिः ॥

अर्थ—पूर्वीच्या उदाहरणांत जे अंक सांगितले आहेत त्यांच्या वर्गांच्या व घनांच्या बेरजा सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

एकादि नवांत संख्यांचे वर्गैक्य करावयाचे तर पदसंख्या ९ हिची दुप्पट १८ एक मिळवून १९ तिहीनें भागून $\frac{१९}{३}$ यास ९ चें संकलित ४५ यानें गुणून $\frac{१९}{३} \times \frac{४५}{१} = २८५$ हें वर्गैक्य झालें.

एकादि नवांत संख्यांचें संकलित ४५ याचा वर्ग २०२५ ही १ पासून ९ अंकांच्या घनांची बेरीज झाली. याचप्रमाणें अन्य उदाहरणें सोडवावी.

उपपत्ति.

या प्रकरणाच्या पहिल्या श्लोकाच्या उपपत्तीपैकीं समीकरण (४) वरून प्रस्तुत श्लोकांतील वर्गैक्याच्या रीतीची उपपत्ति स्पष्ट होते.

आतां घनैक्याच्या रीतीची उपपत्ति करूं.

$$न^{४} - (न - १)^{४} = ४ न^{३} - ६ न^{२} + ४ न - १$$

$$(न-१)^{४} - (न-२)^{४} = ४(न-१)^{३} - ६ (न-१)^{२} + ४ (न-१) - १$$

$$(न-२)^{४} - (न-३)^{४} = ४(न-२)^{३} - ६ (न-२)^{२} + ४ (न-२) - १$$

$$(न-३)^{४} - (न-४)^{४} = ४(न-३)^{३} - ६ (न-३)^{२} + ४ (न-३) - १$$

$$(न-४)^{४} - (न-५)^{४} = ४(न-३)^{३} - ६ (न-४)^{२} + ४ (न-४) - १$$

....

....

$$(\text{५})^{४} - (\text{४})^{४} = \text{४}\,(\text{५})^{३} - \text{६}\,(\text{५})^{२} + \text{४}\,(\text{५}) - \text{१}$$

$$(\text{४})^{४} - (\text{३})^{४} = \text{४}\,(\text{४})^{३} - \text{६}\,(\text{४})^{२} + \text{४}\,(\text{४}) - \text{१}$$

$$(\text{३})^{४} - (\text{२})^{४} = \text{४}\,(\text{३})^{३} - \text{६}\,(\text{३})^{२} + \text{४}\,(\text{३}) - \text{१}$$

$$(\text{२})^{४} - (\text{१})^{४} = \text{४}\,(\text{२})^{३} - \text{६}\,(\text{२})^{२} + \text{४}\,(\text{२}) - \text{१}$$

$$(\text{१})^{४} - (\text{०})^{४} = \text{४}\,(\text{१})^{३} - \text{६}\,(\text{१})^{२} + \text{४}\,(\text{१}) - \text{१}$$

या सर्वांच्या बेरजेवरून.

$$\begin{aligned} \text{न}^{४} = & \ \text{४}\,(\text{१}^{३} + \text{२}^{३} + \text{३}^{३} + \text{४}^{३} + \cdots\cdots + \text{न}^{३}) \\ & - \text{६}\,(\text{१}^{२} + \text{२}^{२} + \text{३}^{२} + \text{४}^{२} + \cdots\cdots + \text{न}^{२}) \\ & + \text{४}\,(\text{१} + \text{२} + \text{३} + \text{४} + \cdots\cdots + \text{न}) \\ & - \text{न} \end{aligned}$$

$\therefore$ $\text{न}^{४} = \text{४}$ घनैक्य $- \text{६}$ वर्गैक्य $+ \text{४}$ संकलित $-$ न

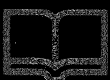
$\therefore$ $\text{४}\,\text{घ} = \text{न}^{४} + \text{६}\,\text{व} - \text{४}\,\text{सं} + \text{न}$

यांत वर्गैक्याची व संकलिताची किंमत ठेवून.

$$\text{घ} = \frac{\text{न}^{४} + \text{६}\left(\frac{\text{२न} + \text{१}}{\text{३}}\left(\frac{\text{न}^{२}}{\text{२}} + \frac{\text{न}}{\text{२}}\right)\right) - \text{४}\left(\frac{\text{न}^{२}}{\text{२}} + \frac{\text{न}}{\text{२}}\right) + \text{न}}{\text{४}}$$

$$= \frac{\text{न}^{४} + \text{६}\left(\frac{\text{२न}^{३} + \text{२न}^{२} + \text{न}^{२} + \text{न}}{\text{६}}\right) - \text{४}\left(\frac{\text{न}^{२} + \text{न}}{\text{२}}\right) + \text{न}}{\text{४}}$$

$$= \frac{\text{न}^{४} + \text{२न}^{३} + \text{३न}^{२} + \text{न}^{२} + \text{न} - \text{२न}^{२} - \text{२न} + \text{न}}{\text{४}}$$



$$= \frac{न^4 + २ न^3 + न^2}{४}$$

$$= \frac{(न^2 + २ न + १) न^2}{४}$$

$$= \left(\frac{न (न + १)}{२} \right)^2$$

$\therefore$ घनैक्य = सकलित^2

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोकः—व्येकपदघ्नचयो मुखयुक्स्यादंत्यधनं मुखयुग्दलितं तत् ॥ मध्यधनं पदसंगुणितं तत्सर्वधनं गणितं च तदुक्तम् ॥

अर्थ—एकोन गच्छास उत्तरानें गुणून त्यांत आदिपद मिळवावें म्हणजे अंत्यधन येतें. आदिपदामध्यें अंत्यधन मिळवून अर्ध केलें असतां मध्यधन येतें. आणि मध्यपदास गच्छानें गुणिलें असतां सर्वधन येतें. या सर्वधनास गणित अशीही संज्ञा आहे.

उपपत्ति.

या प्रकरणाच्या आरंभीच्या श्लोकाच्या उपपत्तींतील समीकरण (१) वरून प्रकृत दिलेल्या अंत्यधनाच्या रीतीची उपपत्ति होते. समीकरण (२) वरून सर्वधनाच्या रीतीची उपपत्ति होते. आणि $\frac{आदि + अंत्य}{२}$ यास मध्यधन अशी संज्ञाच केली आहे कारण संज्ञा न म्हटल्यास समपदें ज्या ठिकाणीं असतील त्या ठिकाणीं मध्यधनाचा अभाव होतो.

उदाहरणम्—आद्ये दिने द्रम्मचतुष्टयं यो दत्वा द्विजेभ्योऽनुदिनं प्रवृत्तः ॥ दातुं सखे पंचचयेन पक्षे द्रम्मा वद द्राकति तेन दत्ताः ॥

अर्थ—एका गृहस्थानें पहिले दिवशीं ब्राह्मणांस ४ द्रम्म दिले, व पुढें दररोज ५ द्रम्म देऊं लागला तेव्हां १५ दिवसांमध्यें त्यानें ब्राह्मणांस किती द्रम्म दिले तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें आदि ४ चय ५ व गच्छ १५ आहे. म्हणून एकोन गच्छ १४ यास उत्तर ५ नें गुणून ७० यांत आदि ४ मिळवून ७४ हें अंत्यधन झालें व $\frac{\text{आदि } ४ + \text{अंत्यधन } ७४}{२} = ३९$ मध्यधन

मध्यधन ३९ × गच्छ १५ = ५८५ सर्वधन हें उत्तर.

उदाहरणम्—आदिः सप्त चयः पंच गच्छोऽष्टौ यत्र तत्र मे ॥ मध्यांत्यधनसंख्ये के वद सर्वधनं च किम् ॥

अर्थ—जर आदि ७ चय ५ गच्छ ८ आहे, तर मध्यधन, अंत्यधन, व सर्वधन काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\left.\begin{array}{l} (८ - १)५ + ७ = ४२ \text{ अंत्यधन} \\ \frac{७ + ४२}{२} = \frac{४९}{२} \text{ मध्यधन} \\ \frac{४९}{२} \times \frac{८}{१} = १९६ \text{ सर्वधन} \end{array}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—गच्छहृते गणिते वदनं स्याद्व्येकपदघ्नचयार्धविहीने ॥

अर्थ—सर्वधनास गच्छानें भागून जो भागाकार येईल त्यांतून एकोन गच्छास उत्तरानें गुणून जें अर्ध होईल तें वजा करावें म्हणजे आदिधन येतें.

उपपत्ति.

$$\text{सर्वधन} = \frac{\text{आदि} + \text{अंत्य}}{२} \times \text{गच्छ}$$

यांत अंत्य = आ + (ग − १) उ ही किंमत ठेवून

$$\text{सर्वधन} = \frac{\text{आ} + \text{आ} + (\text{ग} - १)\text{उ}}{२} \times \text{गच्छ}$$

$$\therefore \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} = \frac{२\,\text{आ} + (\text{ग} - १)\text{उ}}{२}$$

$$\therefore \frac{\text{स}}{\text{ग}} = \text{आ} + \frac{(\text{ग} - १)\text{उ}}{२}$$

$$\therefore \text{आदि} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \frac{(\text{ग} - १)\text{उ}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—पंचाधिकं शतं श्रेढीफलं सप्तपदं किल ॥
चयं त्रयं वयं विद्मो वदनं वद नंदन ॥

अर्थ—जर सर्वधन १०५ गच्छ ७ आणि चय ३ आहे तर आदि काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{आदि} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \frac{(\text{ग} - १)\text{उ}}{२}$$

या सारणींत दिलेल्या किमती ठेवून.

$$\text{आदि} = \frac{१०५}{७} - \frac{(७-१)३}{२}$$

∴ आदि = १५ – ९ = ६ हें उत्तर.

सूत्रम्—गच्छहृतं धनमादिविहीनं व्येकपदार्धहृतं च चयः स्यात् ॥

अर्थ—सर्व धनास गच्छानें भागून त्यांतून आदि वजा करावा. आणि शेषास एकोन गच्छाच्या अर्धानें भागिले असतां चयाची किंमत येतें.

उपपत्ति.

गच्छहृते गणिते इत्यादि सूत्रावरून.

$$\text{आदि} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \frac{(\text{ग} - १)\text{उ}}{२}$$

$$\therefore \frac{(\text{ग} - १)\text{उ}}{२} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \text{आ.}$$

$$\therefore \text{उ} = \frac{\frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \text{आ.}}{\frac{\text{ग} - १}{२}}$$

म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—प्रथममगमदह्ना योजने योजनेशस्तदनु ननु कयाऽसौ ब्रूहि यातोऽध्ववृद्ध्या ॥ अरिकरिहरणार्थं योजनानामशीत्या रिपुनगरमवाप्तः सप्तरात्रेण धीमन् ॥

अर्थ—एक राजा शत्रूचे हत्ती जिंकण्याकरितां ८० योजनें ७ दिवसांत चालून शत्रूच्या नगरास पोंचला. तो पहिल्या

दिवशीं २ योजनें गेला तर दुसऱ्या दिवसापासून तो दररोज किती अधिक चालत गेला हें सांग ?

येथें गच्छ ७ सर्वधन ८० व आदि २ यांपासून चय काढावयाचा असा तात्पर्यार्थ झाला.

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$उ = \frac{\frac{स}{ग} - आ.}{\frac{ग - १}{२}}$$

या समीकरणामध्यें दिलेल्या किमती ठेवून.

$$उ = \frac{\frac{८०}{७} - २}{\frac{७ - १}{२}} = \frac{८० - १४}{७} \cdot \frac{२}{६}$$

$\therefore$ $उ = \frac{२२}{७} = ३\frac{१}{७}$ हें उत्तर.

सूत्रम्—श्रेढीफलादुत्तरलोचनघ्नाच्चयार्धवक्त्रांतरवर्ग-युक्तात् ॥ मूलं मुखोनं चयखंडयुक्तं चयोद्धृतं गच्छमुदा-हरन्ति ॥

अर्थ—सर्व धनास उत्तरानें गुणून दुप्पट करावी, तीमध्यें आदींतून चयार्ध वजा करून त्याचा वर्ग मिळवावा. त्याच्या वर्गमूळांतून आदि वजा करून चयार्ध मिळवावें नंतर चयानें भागिलें असतां गच्छ येतो.

उपपत्ति.

$$सर्वधन = \frac{आ + अं}{२} \cdot गच्छ$$

यांत अंत्यधनाची किंमत ठेवून

$$\text{स} = \frac{\text{आ} + \text{आ} + (\text{ग} - १)\,\text{उ}}{२} \cdot \text{ग}$$

$$\therefore \text{स} = \frac{२\,\text{आ} + \text{ग}\,\text{उ} - \text{उ}}{२} \cdot \text{ग}$$

$$= \frac{२\,\text{आ. ग.} + \text{ग}^{२}\,\text{उ} - \text{उ}\,\text{ग}}{२}$$

$$\therefore २\,\text{स} = २\,\text{आ}\,\text{ग} + \text{ग}^{२}\,\text{उ} - \text{उ}\,\text{ग}.$$

$$\therefore \quad \text{उ}\,\text{ग}^{२} + \text{ग}\,(२\,\text{आ} - \text{उ}) = २\,\text{स}$$

उभयपक्षांस उ नें भागून

$$\frac{२\,\text{स}}{\text{उ}} = \text{ग}^{२} + \frac{\text{ग}\,(२\,\text{आ} - \text{उ})}{\text{उ}}$$

हें वर्ग समीकरण झालें. म्हणून ग च्या गुणकाच्या निम्पटीचा वर्ग दोन्ही पक्षांत मिळवून

$$\text{ग}^{२} + \frac{\text{ग}\,(२\,\text{आ} - \text{उ})}{\text{उ}} + \left(\frac{२\,\text{आ} - \text{उ}}{२\,\text{उ}}\right)^{२} = \frac{२\,\text{स}}{\text{उ}} + \left(\frac{२\,\text{आ} - \text{उ}}{२\,\text{उ}}\right)^{२}$$

उभयपक्षांची वर्गमूळें काढून.

$$\text{ग} + \frac{२\,\text{आ} - \text{उ}}{२\,\text{उ}} = \pm \frac{\sqrt{८\,\text{स}\,\text{उ} + (२\,\text{आ} - \text{उ})^{२}}}{\sqrt{४\,\text{उ}^{२}}}$$

$$\therefore \text{ग} = \frac{\mp \sqrt{८\,\text{स}\,\text{उ} + (२\,\text{आ} - \text{उ})^{२}}}{२\,\text{उ}} - \frac{२\,\text{आ} - \text{उ}}{२\,\text{उ}}$$



$$ग = \frac{\pm\sqrt{२ स उ + \left(आ - \frac{उ}{२}\right)} - आ + \frac{उ}{२}}{उ}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—द्रम्मत्रयं यः प्रथमेऽन्हि दत्त्वा दातुं प्रवृत्तो द्विचयेन तेन ॥ शतत्रयं षष्ट्यधिकं द्विजेभ्यो दत्तं कियद्भिर्दिवसैर्वदाऽऽशु ॥

अर्थ—एका गृहस्थानें पहिल्या दिवशीं ३ द्रम्म ब्राह्मणाला देऊन पुढें प्रति दिवशीं दोन दोन द्रम्म अधिक या पद्धतीनें ३६० द्रम्म दिले तर त्याला किती दिवस लागले हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें आदि ३ चय २ व सर्वधन ३६० यांवरून गच्छ काढावयाचा आहे.

$$\therefore गच्छ = \frac{\sqrt{२ स उ + \left(आ - \frac{उ}{२}\right)^{२}} - आ + \frac{उ}{२}}{उ}$$

$$गच्छ = \frac{\sqrt{२ \times ३६० \times २ + \left(३ - \frac{२}{२}\right)^{२}} - ३ + \frac{२}{२}}{२}$$

$$\therefore गच्छ = \frac{\sqrt{१४४० + ४} - २}{२} = १८$$ हें उत्तर.

सूत्रम्—विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समेऽर्धिते वर्गः ॥ गच्छक्षयांतमंत्याद्व्यस्तं गुणवर्गजं फलं यत्तत् ॥ व्येकं व्येकगुणोद्धृतमादिगुणं स्याद्गुणोत्तरे गणितम् ॥

अर्थ—विषम गच्छ असल्यास त्यांतून १ वजा करून गुणक संज्ञा स्थापन करावी. व सम गच्छ असल्यास त्यांचे अर्ध करून वर्ग संज्ञा स्थापन करावी. पुढें वजा करून किंवा अर्ध करून आलेली संख्या विषम असल्यास १ वजा करून पूर्वी जी संज्ञा मांडली तिच्या उजवीकडे पुनः गुणक संज्ञा मांडावी; सम असल्यास अर्ध करून वर्ग संज्ञा मांडावी. अशीच क्रिया गच्छाचा क्षय होईपर्यंत करावी. अशा कृतीनें गुण-वर्गात्मक एक पंक्ति तयार होते. नंतर अखेरीस जी संज्ञा असेल ती प्रमाणें गुणोत्तर किंवा गुणोत्तराचा वर्ग करावा म्हणजे अखेरीस वर्गसंज्ञा असल्यास गुणोत्तराचा वर्ग करावा गुणक संज्ञा असल्यास गुणोत्तरच घ्यावें. नंतर उजवेकडून डावीकडे जी दुसरी संज्ञा असेल त्याप्रमाणें पूर्वीच्या संख्येस क्रिया करावी ही क्रिया पंक्ति समाप्तिपर्यंत करावी म्हणजे या कृतीनें गुणोत्तराचा गच्छाइतका घात होतो. नंतर त्यांतून १ वजा करून आदीनें गुणावें. आलेल्या गुणाकारास एकोन गुणोत्तरानें भागिलें असतां सर्वधन येतें.

उपपत्ति.

आ = प्रथम दिवशीं दिलेलें द्रव्य; व र = ज्या पटीनें रोज द्रव्य दिलें तें गुणोत्तर.

∴ प्रथम दिवशीं दिलेलें द्रव्य .... आ

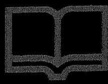
दुसऱ्या .... आ. र

तिसऱ्या .... आ. $र^2$

चवथ्या .... आ $र^3$

पांचव्या .... आ $र^4$

....



(ग) संख्याक दिवशीं .... $आ\ र^{ग-१}$

$\therefore$ सर्वधन $= आ + आ\ र + आ\ र^{२} + आ\ र^{३} +$

$आ\ र^{४} \ldots\ldots\ldots\ldots आ\ र^{ग-२} + आ\ र^{ग-१}$

उभयपक्षांस र नें गुणून

$स.\ र = आ\ र + आ\ र^{२} + आ\ र^{३} + \ldots\ldots + आ\ र^{ग-१} + आ\ र^{ग}$

या समीकरणांतून वरील समीकरण वजा करून

$$स\ र - स = आ\ र^{ग} - आ = आ\ (र^{ग} - १)$$

$$\therefore\ स\ (र - १) = आ\ (र^{ग} - १)$$

$$\therefore\ स = \frac{(र^{ग} - १)}{(र - १)} \cdot आ$$

आतां $र^{ग} = (२)^{३१}$ येथें विषम गच्छ आहे

$$\therefore\ (२)^{३१} = \left(\left(\left(\left(२^{२}_{व} \times २_{गु}\right)^{२}_{व} \times २_{गु}\right)^{२}_{व} \times २_{गु}\right)^{२}_{व} \times २_{गु}\right)$$

म्हणून इष्ट सूत्र सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—पूर्वं वराटकयुगं येन द्विगुणोत्तरं प्रतिज्ञातम् ॥ प्रत्यहमर्थिजनाय स मासे निष्कान्ददाति कति ॥

अर्थ—एका गृहस्थानें पहिल्या दिवशीं २ कवड्या याचकास दिल्या. पुढें तो प्रत्येक दिवशीं दुप्पट दुप्पट देऊं लागला. तेव्हां त्यानें एका महिन्यामध्यें किती निष्क दिले. हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें आदि २ गुणोत्तर २ व गच्छ ३० यांवरून सर्वधन काढावयाचें आहे.

गच्छ सम आहे म्हणून त्याचें अर्ध १५ करून वर्ग संज्ञा एका बाजूस मांडली. पुढें १५ हें विषम आहेत म्हणून १ वजा करून १४ पूर्वीच्या वर्ग संज्ञेच्या पुढें गुणक संज्ञा लिहिली. १४ हे सम असल्यामुळें अर्ध ७ करून वर्ग संज्ञा मांडली. ७ हे विषम आहेत म्हणून १ वजा करून ६ गुणक संज्ञा मांडली. ६ हे सम असल्यामुळें अर्ध ३ करून वर्ग संज्ञा स्थापिली. पुढें ३ हे विषम म्हणून १ वजा करून २ गुणक संज्ञा २ चें अर्ध १ म्हणून वर्ग संज्ञा मांडली. याप्रमाणें गुणवर्गात्मक पंक्ति तयार झाली ती व. गु. व. गु. व. गु. व. अशी आहे. आतां या पंक्तीच्या शेवटच्या संज्ञेप्रमाणें गुणोत्तरास कृति करून पुढें विपरीत क्रमानें संज्ञाप्रमाणें करीत असतां २ याचा वर्ग ४ यास २ नीं गुणून ८ याचा वर्ग ६४ यास दोहोंनीं गुणून १२८ याचा वर्ग १६३८४ यास २ नीं गुणून ३२७६८ याचा वर्ग करून १०७३७४१८२४ हा गुणोत्तराचा गच्छाइतका घात झाला. यांस १ वजा करून एकोन गुणोत्तरानें (२–१) भागून व आदि २ यानें गुणून सर्वधन २१४७४८३६४६ कवड्या झाल्या. व याचे निष्क १०८५७ द्रम्म ९ पैसे ९ दमड्या २ कवड्या ६ हें उत्तर.

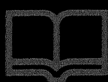
उदाहरणम्—आदिर्द्वयं सखे वृद्धिः प्रत्यहं त्रिगुणोत्तरा॥ गच्छः सप्तदिनं यत्र गणितं तत्र किं वद ॥

अर्थ—आदि २ गुणोत्तर ३ गच्छ ७ आहे तर सर्वधन काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें गुणोत्तर ३ याचा गच्छाइतका म्हणजे ७ घात २१८७ झाला यांत १ वजा करून एकोन गुणोत्तरानें २ भागून आदी २ नें गुणून २१८६ सर्वधन हें उत्तर.

सूत्रम्—पादाक्षरमितगच्छे गुणवर्गफलं चये द्विगुणे ॥ समवृत्तानां संख्या तद्वर्गो वर्गवर्गश्च ॥ स्वस्वपदोनौ स्यातामर्धसमानां च विषमाणाम् ॥



अर्थ—ज्या वृत्ताचे चारी चरण लघुगुरूंच्या संबंधानें समान असतात अशा वृत्तास समवृत्त म्हणतात; या समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या काढण्याची रीति—

समवृत्ताच्या चरणामध्यें जितकीं अक्षरें असतील तो गच्छ व गुणोत्तर २ कल्पून २ चा गच्छाइतका घात केला असतां समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या होते.

ज्या वृत्तांतील पहिला चरण व तृतीय चरण समान असतात. व दुसरा चरण चवथ्या चरणाशीं तुल्य असतो यास अर्ध समवृत्त असें म्हणतात. या अर्ध समवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या काढण्याची रीति—

समवृत्ताच्या प्रस्तार भेदसंख्येचा वर्ग करून त्यांतून समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या वजा करावी. जी बाकी राहील ती अर्ध समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या होईल.

ज्या वृत्तांतील चारी चरण असमान असतात त्यास विषमवृत्त असें म्हणतात. या विषमवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या काढण्याची रीति—

समवृत्ताच्या प्रस्तार भेदसंख्येच्या चतुर्घातांतून समवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या वजा केली असतां विषमवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या होते.

उपपत्ति.

लघु } $२^{१}$ हे दोन भेद एकाक्षर चरण
गुरु } समवृत्ताचे.

ल ल
गु गु
ल ल
गु गु } $२^{२}$ = ४ हे भेद व्यक्षर चरण समवृत्ताचे.

ल ल ल
गु ल ल
ल गु ल
गु गु ल
ल ल गु
गु ल गु
ल गु गु
गु गु गु } $२^{३}$ = ८ हे भेद त्र्यक्षर चरण समवृत्ताचे.

मागील पद्धतीनें } $२^{४}$ = १६ भेद चतुरक्षर समवृताचे

....

$२^{न}$ = न संख्याकाक्षर चरण समवृत्ताचे भेद.

म्हणून समवृत्तभेदाच्या रीतीची सिद्धि झाली.

आतां न संख्याकाक्षरचरणसमवृत्ताचे भेद दोन ठिकाणीं मांडून त्यांतील एका पंक्तीपैकीं एकेक भेद घेऊन तो दुसऱ्या पंक्तींतील तत्समान एक भेद सोडून देऊन बाकीच्या सर्व भेदांस जोडिलें असतां अर्धसमवृत्ताचे भेद होतील. जसें.

प्रथमपंक्ति.	द्वितीयपंक्ति.
ल ल ल	ल ल ल ....
ग ल ल	ग ल ल ....
ल ग ल	ल ग ल ....

ग ग ल .... ग ग ल ....

ल ल ग .... ल ल ग ....

ग ल ग .... ग ल ग ....

....

....

$२^{न}$ $२^{न}$

प्रथमपंक्तींतील (ल ल ल....) टाकून देऊन बाकी सर्व भेदांस द्वितीयपंक्तींतील (ल ल ल....) जोडले तर ($२^{न}$–१) इतके भेद अर्धसमाचे होतील तसेंच द्वितीयपंक्तींतील दुसरा भेद जो (ग ल ल....) हा प्रथमपंक्तींतील तत्समान (ग ल ल....) टाकून देऊन बाकीच्या सर्वांस जोडला असतां त्याचे भेद ($२^{न}$ – १) इतके होतात. व असेंच प्रत्येक जोडल्यानें भेद $२^{न}$ इतके होतील म्हणून

$२^{न}$ ($२^{न}$ – १) = अर्ध समवृत्तभेद.

∴ $(२^{न})^{२} - २^{न}$ = अर्धसमभेद.

म्हणून अर्धसमवृत्ताच्या भेदाच्या रीतीची उपपत्ति झाली.

आतां कांहीं समवृत्त चरण मांडूं

ल ल ल	ल ल ल	ल ल ल	ल ल ल
ल ल गु	ल ल गु	ल ल गु	ल ल गु
ग ल ल	ग ल ल	ग ल ल	ग ल ल
ग ल ग	ग ल ग	ग ल ग	ग ल ग
ल ग ल	ल ग ल	ल ग ल	ल ग ल
....	....	....	....
....	....	....	....
$२^{न}$	$२^{न}$	$२^{न}$	$२^{न}$

प्रथमपंक्तींतील भेदांस द्वितीयपंक्तींतील प्रत्येक भेद क्रमानें जोडला असतां (२^{न})^{२} इतके भेद होतात. तसेंच तिसऱ्या व चवथ्या पंक्तींतील भेद (२^{न})^{२} होतील. आतां या भेदांच्या पंक्ति मांडून दाखवितों.

प्रथमपंक्ति	द्वितीयपंक्ति
ल ल ल ल ल ल	ल ल ल ल ल ल
ल ल गु ल ल गु	ल ल गु ल ल गु
ग ल ल ग ल ल	ग ल ल ग ल ल
ग ल ग ग ल ग	ग ल ग ग ल ग
ल ग ल ल ग ल	ल ग ल ल ग ल
....	....
(२^{न})^{२}	(२^{न})^{२}

आतां प्रथम पंक्तींतील भेद द्वितीय पंक्तींतील स्वसमान भेद टाकून बाकी सर्व भेदास जोडले असतां प्रत्येकाच्या संबंधानें

सर्व भेद $\left((२^{न})^{२} - १ \right) \times (२^{न})^{२}$ इतके होतील.

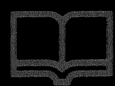
$$\therefore \quad \text{विषमवृत्तभेद} = \left((२^{न})^{२} - १ \right) \times (२^{न})^{२}$$

$$= (२^{न})^{४} - (२^{न})^{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—समानामर्धतुल्यानां विषमाणां पृथक्पृथक् ॥
वृत्तानां वद मे संख्यामनुष्टुप्छन्दसि द्रुतम् ॥

अर्थ—समवृत्त, अर्धसमवृत्त, आणि विषमवृत्त यांच्या



विस्तारभेद संख्या, अनुष्टुप्छन्द संबंधानें म्हणजे ८ अक्षरें वृत्त चरणांतील धरून लवकर सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें चरणांत ८ अक्षरें आहेत म्हणून २ चा अष्टघात २५६ समवृत्तसंख्या हें उत्तर.

समवृत्तसंख्या २५६ हिचा वर्ग ६५५३६ – २५६ = ६५२८० अर्धसमवृत्तसंख्या हें उत्तर.

समवृत्तसंख्या २५६ हिचा चतुर्घात ४२९४९६७२९६ – ६५५३६ = ४२९४९०१७६० विषमवृत्तसंख्या हें उत्तर.

या प्रमाणें श्रेढीव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

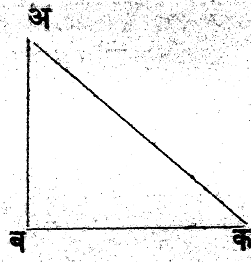
कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु ॥

क्षेत्रव्यवहार प्रकरण.

**श्लोक–इष्टो बाहुर्यः स्यात्तत्स्पर्धिन्यां दिशीतरो बाहुः ॥
त्र्यस्रे चतुरस्रे वा सा कोटिः कीर्तिता तज्ज्ञैः ॥**

अर्थ—काटकोन त्रिकोणामध्यें परस्परांस लंबरूप असणाऱ्या ज्या दोन रेषा त्यांपैकीं एका रेषेस भुज असें म्हणतात; व दुसऱ्या रेषेस कोटि असें म्हणतात; आणि तिसऱ्या रेषेस कर्ण असें म्हणतात.

जसें अ ब क, ह्या काटकोन त्रिकोणामध्यें अ ब, आणि ब क, ह्या परस्परांस लंबरूप आहेत; म्हणून अ ब, हा भुज; ब क, ही कोटि; आणि अ क, हा कर्ण होय.

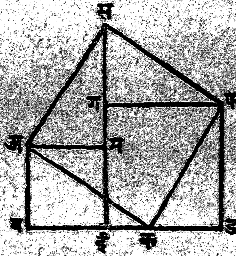


श्लोक—तत्कृत्योर्योगपदं कर्णो दोःकर्णवर्गयोर्विवरात् ॥
मूलं कोटिः कोटिश्रुतिकृत्योरंतरात्पदं बाहुः ॥

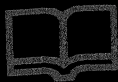
अर्थ—काटकोन त्रिकोणामध्यें भुजाच्या वर्गामध्यें कोटीचा वर्ग मिळवून जी संख्या होईल, तिचें वर्गमूळ काढिलें असतां कर्णाची किंमत येते.

कर्णाच्या वर्गांतून भुजाचा वर्ग वजा करून बाकीचें वर्गमूळ काढिलें असतां कोटीची किंमत येते. आणि कर्णाच्या वर्गांतून कोटीचा वर्ग वजा करून बाकीचें वर्गमूळ काढिलें असतां भुजाची किंमत येते.

उपपत्ति.



प्रथम अ ब क, हा एक काटकोन त्रिकोण घ्या; त्यां-



तील अ ब, ह्या भुजावर अ ब इ म, चौरस काढा. नंतर ब क, बाजू वाढवून तीमध्यें ड, हा बिंदु असा घ्या कीं, ब क, बरोबर इ ड, होईल; आणि इ ड, ह्या रेषेवर इ ड फ ग, हा चौरस काढा; नंतर इ ग, रेषा वाढवून तीमध्यें स, हा बिंदु असा घ्या कीं; इ ग, बरोबर म स, होईल. नंतर अ स फ क, हे बिंदु सांधा.

आतां अ स फ क, हा अ क, बाजूवरील चौरस होईल व त्या चौरसाबरोबर अ ब, बाजूवरील चौरस व ब क, बाजूवरील चौरस होईल.

कारण अ ब क, ह्या त्रिकोणाची अ ब, बाजू, ब क, बाजू आणि अ ब क, हा कोन हे क्रमानें, अ म स, ह्या त्रिकोणाची अ म, बाजू; म स, बाजू आणि अ म स, हा कोन ह्या बरोबर आहेत; म्हणून रेखागणिताच्या पहिल्या अध्यायांतील चवथ्या सिद्धांताप्रमाणें अ ब क, आणि अ म स, हे दोन्ही त्रिकोण एकरूप आहेत म्हणून ब अ क, हा कोन म अ स, ह्या कोना-बरोबर आहे; ह्या दोहोंमध्यें क अ म, हा कोन मिळविला असतां ब अ म, कोन क अ स, कोनाबरोबर होईल. परंतु ब अ म, हा कोन काटकोन आहे म्हणून क अ स, हा कोन काट-कोन झाला. याच पद्धतीनें क ड फ, आणि स ग फ, हे दोन्ही त्रिकोण एकरूप आहेत व स फ क, हा कोन काटकोन आहे असें दाखवितां येईल म्हणून अ क, अ स, स फ, आणि फ क, ह्या चारी बाजू समान आहेत आणि अ स, फ क, हे चारी कोन काटकोन आहेत; करितां अ क, ह्या बाजू-वरील अ स फ क, हा चौरस झाला व ह्या चौरसाबरोबर, अ ब, बाजूवरील अ ब इ म, हा चौरस आणि इ ड, बाजू वरील (ब क, बाजूवरील) चौरस इ ड फ ग, हे झाले म्हणून

$$भुज^2 + कोटि^2 = कर्ण^2 \quad .... \quad .... \quad .... \quad ....(१)$$

असें समीकरण तयार झालें. या समीकरणाच्या उभयपक्षांची वर्गमूळें काढून,

$$कर्ण = \sqrt{भुज^2 + कोटि^2}$$

समीकरण (१) पासून

$$भुज^2 = कर्ण^2 - कोटि^2$$

$$\therefore \quad भुज = \sqrt{कर्ण^2 - कोटि^2}$$

$$आणि\ कोटि^2 = कर्ण^2 - भुज^2$$

$$\therefore \quad कोटि = \sqrt{कर्ण^2 - भुज^2}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—राश्योरंतरवर्गेण द्विघ्ने घाते युते तयोः ॥ वर्गयोगो भवेदेवं तयोर्योगांतरा हतिः ॥ वर्गांतरं भवेदेवं ज्ञेयं सर्वत्र धीमता ॥

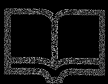
अर्थ—दोन राशींच्या अंतराच्या वर्गामध्यें त्याच दोन राशींच्या गुणाकाराची दुप्पट मिळवून जी संख्या होईल ती त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

दोन राशींच्या बेरजेस त्याच दोन राशींच्या अंतरानें गुणून जो गुणाकार येईल, तो त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या अंतराबरोबर असतो.

उपपत्ति.

अ = प्रथम राशि व

ब = द्वितीय राशि धरून



$$(अ - ब)^{२} = अ^{२} - २ अ ब + ब^{२}$$

उभयपक्षांमध्यें २ अ ब मिळवून

$$(अ - ब)^{२} + २ अ ब = अ^{२} + ब^{२} \text{ आणि}$$

$$(अ + ब) (अ - ब) = अ^{२} - ब^{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—कोटिश्चतुष्टयं यत्र दोस्त्रयं तत्र का श्रुतिः॥
कोटिं दोष्कर्णतः कोटिश्रुतिभ्यां च भुजं वद ॥

अर्थ—ज्या काटकोण त्रिकोणाची कोटि ४ व भुज ३ आहे त्या त्रिकोणांतील कर्णाची किंमत काय आहे हें सांग ?

ज्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ५ व भुज ३ आहे त्या त्रिकोणांतील कोटीची किंमत काय आहे हें सांग ? आणि ज्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ५ व कोटि ४ आहे त्यांतील भुजाची किंमत काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$भुज^{२} + कोटि^{२} = कर्ण^{२}$$

या सारणीमध्यें पहिल्या उदाहरणामध्यें दिलेल्या किंमती ठेवून

$$(३)^{२} + (४)^{२} = कर्ण^{२}$$

$\therefore$ कर्ण^{२} = ९ + १६ = २५

$\therefore$ कर्ण = ५ हें उत्तर.

$$\text{आतां } कोटि = \sqrt{कर्ण^{२} - भुज^{२}}$$

या सारणीमध्यें दुसऱ्या उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून

$$कोटि = \sqrt{(५)^{२} - (३)^{२}}$$

$\therefore$ कोटि = ४ हें उत्तर.

आणि $भुज = \sqrt{कर्ण^{२} - कोटि^{२}}$

या सारणीमध्यें तिसऱ्या उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून

भुज = ३ हें उत्तर.

उदाहरणम्—सांघ्रित्रयमितो बाहुर्यत्र कोटिश्च तावती ॥ तत्र कर्णप्रमाणं किं गणक ब्रूहि मे द्रुतम् ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणाचा भुज $३\frac{१}{४}$ व कोटि $३\frac{१}{४}$ आहे तेथें कर्णमान सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$कर्ण = \sqrt{भुज^{२} + कोटि^{२}}$

या सारणीमध्यें उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेऊन

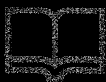
$कर्ण = \sqrt{(३\frac{१}{४})^{२} + (३\frac{१}{४})^{२}}$

$= \sqrt{\frac{१६९}{८}}$ हें उत्तर.

श्लोक—वर्गेण महतेष्टेन हताच्छेदांशयोर्वधात् ॥ पदं गुणपदक्षुण्णच्छिद्भक्तं निकटं भवेत् ॥

अर्थ—या श्लोकामध्यें करणीगत संख्येचें आसन्नमूळ (सुमाराचें बरोबर) काढण्याची रीति दिली आहे ती अशी.

करणीमध्यें असणाऱ्या अंश छेदांच्या गुणाकारास, ज्याचें बरोबर वर्गमूळ निघेल अशा एखाद्यामहाइष्टानें गुणावें. नंतर आलेल्या गुणाकाराचें वर्गमूळ काढून त्यास छेदानें व महाइष्टाच्या वर्गमूळानें भागावें. म्हणजे आसन्नमूळ येईल. जसें मागील उदाहरणांत कर्णाची किंमत $\sqrt{\frac{१६९}{८}}$ ही आली आहे. हिचें आसन्नमूळ काढणें आहे. करितां अंश १६९ व छेद ८ ह्यांचा गुणाकार १३५२ झाला, यास महाइष्ट १०००० यानें



गुणून गुणाकार १३५२०००० आला याचें आसन्न वर्गमूळ ३६७७ आलें. यास छेद ८ व महाइष्टाचें वर्गमूळ १०० यांनीं भागून ४$\frac{४७७}{८००}$ हें $\sqrt{\frac{१६९}{८}}$ ह्याचें आसन्नमूळ झालें.

उपपत्ति.

$$\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \sqrt{\frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{ब} \times \frac{महाइष्ट}{महाइष्ट}}$$

$$= \sqrt{\frac{अ \times ब \times महाइष्ट}{ब^२ \times महाइष्ट}}$$

$$= \frac{\sqrt{अ \times ब \times महाइष्ट}}{ब \times महाइष्टाचें\ वर्गमूळ}$$

$$= \frac{\sqrt{अंश \times छेद \times महाइष्ट}}{ब \times \sqrt{महाइष्ट}}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टो भुजोऽस्माद्द्विगुणेष्टनिघ्नादिष्टस्य कृत्यैकवियुक्तयाऽऽप्तम् ॥ कोटिःपृथक्सेष्टगुणा भुजोना कर्णो भवेत्त्र्यस्रमिदं हि जात्यम् ॥ इष्टो भुजस्तत्कृतिरिष्टभक्ता द्विःस्थापितेष्टोनयुतार्धिता वा ॥ तौ कोटिकर्णाविति कोटितो वा बाहुश्रुती चाकरणीगते स्तः ॥

अर्थ--ज्या काटकोन त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू करणी स्वरूप नाहींत ह्मणजे अखंड आहेत अशा त्रिकोणास जात्यत्र्यस्र ह्मणतात. अशा जात्यत्र्यस्रांतील भुज दिला असतां कोटि व कर्ण काढण्याची रीति या श्लोकांत दिली आहे ती अशी—

पहिली रीति—प्रथम इष्टसंख्या धरून तिच्या दुपटीनें भुजास गुणावें जो गुणाकार येईल त्यास, इष्टसंख्येच्या वर्गांतून एक वजा करून जी बाकी राहील तिनें भागावें. आलेला भागाकार कोटि होईल. आणि कोटीला इष्टसंख्येनें गुणून भुज वजा केला असतां कर्णाची किंमत येईल.

दुसरी रीति—दिलेल्या भुजाचा वर्ग करून इष्टसंख्येनें भागावें जो भागाकार येईल तो दोन ठिकाणीं मांडून एका ठिकाणीं इष्टसंख्या वजा करावी व दुसऱ्या ठिकाणीं इष्टसंख्या मिळवावी नंतर त्यांचीं अर्धें केलीं असतां क्रमानें कोटि व कर्ण यांच्या किमती येतात. याचप्रमाणें कोटीवरून भुज व कर्ण अकरणीगत काढितां येतात.

उदाहरणम्—भुजे द्वादशके यौ यौ कोटिकर्णावनेकधा ॥ प्रकाराभ्यां वद क्षिप्रं तौ तावकरणीगतौ ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणाचा भुज १२ आहे त्याचे अकरणीगत अशी कोटि व कर्ण सांगितलेल्या दोही रीतींनीं अनेक आणून सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया

पहिल्या रीतीनें.

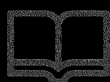
इष्टसंख्या २ धरून तिची दुप्पट ४ झाली; हिनें भुज १२ यास गुणून ४८ गुणाकार आला. यास इष्ट २ चा वर्ग ४ यांतून १ वजा करून संख्या ३ आली हिनें भागून भागाकार १६ आला म्हणून

कोटि = १६ हें उत्तर,

आणि कर्ण = १६ × २ − १२

∴ कर्ण = २० हें उत्तर.

अथवा इष्टसंख्या ३ धरून



$$\text{कोटि} = \frac{२ \times ३ \times १२}{(३)^{२} - १}$$

∴ कोटि = ९ हें उत्तर, आणि कर्ण = ९ × ३ − १२

∴ कर्ण = १५ हें उत्तर.

याप्रमाणें इष्टसंख्या अनेक धरून उत्तरें अनेक येतील;

आतां दुसऱ्या रीतीनें उत्तरें काढूं,

इष्टसंख्या २ धरून

$$\text{कोटि} = \frac{\frac{(१२)^{२}}{२} - २}{२}$$

$$= \frac{\frac{१४४}{२} - \frac{४}{२}}{२}$$

$$= \frac{७२ - २}{२} = ३५ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{कर्ण} = \frac{\frac{१४४}{२} + २}{२} = ३७ \text{ हें उत्तर.}$$

अथवा इष्टसंख्या ४ धरून

कोटि = १६

कर्ण = २०

याप्रमाणें इष्टसंख्या अनेक धरून अनेक उत्तरें, येतील.

उपपत्ति.

कर्ण	कोटि	भुज
$क्ष^{२} + य^{२}$	२ क्ष य	$क्ष^{२} - य^{२}$

असें अकरणीगत कल्पून प्रत्येकास $क्ष^{२} - य^{२}$ या संख्येनें भागिले असतां परस्परांमध्यें जें प्रमाण आहे तें बदलणार नाहीं करितां

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{क्ष^2 + य^2}{क्ष^2 - य^2}$	$\frac{२ क्ष य}{क्ष^2 - य^2}$	१

अशा किंमती आल्या.

आतां कर्ण व कोटि यांच्या अंशच्छेदांस $य^2$ नें भागून

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{\frac{क्ष^2}{य^2} + १}{\frac{क्ष^2}{य^2} - १}$	$\frac{\frac{२ क्ष}{य}}{\frac{क्ष^2}{य^2} - १}$	१

यांतील प्रत्येकास (अ) नें गुणिले असतां परस्परांतील प्रमाण बदलणार नाहीं करितां

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{\left(\frac{क्ष^2}{य^2} + १\right) अ}{\frac{क्ष^2}{य^2} - १}$	$\frac{\frac{२ क्ष. अ}{य}}{\frac{क्ष^2}{य^2} - १}$	अ

येथें $\frac{क्ष}{य}$ = इष्ट संज्ञा देऊन

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{(इष्ट^2 + १) अ}{इष्ट^2 - १}$	$\frac{२ इष्ट. अ}{इष्ट^2 - १}$	अ

∴ भुज = अ आहे तर

$$\text{कोटि} = \frac{२\ \text{इष्ट}.\ \text{भुज}}{\text{इष्ट}^{२} - १} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (१)$$

$$\text{आणि कर्ण} = \frac{(\text{इष्ट}^{२} + १)\ \text{भुज}}{\text{इष्ट}^{२} - १}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \frac{\text{इष्ट}^{२}.\ \text{भुज} + \text{भुज}}{\text{इष्ट}^{२} - १}$$

$$= \frac{२\ \text{इष्ट}^{२}.\ \text{भुज} - \text{इष्ट}^{२}.\ \text{भुज} + \text{भुज}}{\text{इष्ट}^{२} - १}$$

$$= \frac{२\ \text{इष्ट}.\ \text{भुज}}{\text{इष्ट}^{२} - १} \times \text{इष्ट} - \frac{\text{भुज}\ (\text{इष्ट}^{२} - १)}{\text{इष्ट}^{२} - १}$$

$$= \frac{२\ \text{इष्ट}.\ \text{भुज}}{\text{इष्ट}^{२} - १} .\ \text{इष्ट} - \text{भुज}$$

यांतील पहिले पदाच्या गुणकाची किंमत समीकरण (१) मध्यें आहे म्हणून

$$\text{कर्ण} = \text{कोटि} \times \text{इष्ट} - \text{भुज} \ \ldots\ldots\ldots\ (२)$$

म्हणून समीकरण (१) व (२) यांवरून इष्ट सिद्धि झाली.

आतां श्लोकांत जी दुसरी रीति दिली आहे, तिची उपपत्ति देऊं.

कर्ण	कोटि	भुज
$\text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२}$	२ क्ष य	$\text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२}$

असे अकरणीगत कल्पून प्रत्येकास २ य ह्या संख्येनें भागिलें असतां परस्परामध्यें असणारें प्रमाण बदलणार नाहीं

∴ कर्ण कोटि भुज

$$\frac{क्ष^2 + य^2}{२ य} \qquad क्ष \qquad \frac{क्ष^2 - य^2}{२ य}$$

कर्ण व भुज यांच्या अंशच्छेदांस (य) नें भागुन

कर्ण कोटि भुज

$$\frac{\frac{क्ष^2}{य} + य}{२} \qquad क्ष \qquad \frac{\frac{क्ष^2}{य} - य}{२}$$

आतां भुज व कोटि यांमध्यें स्वरूप भेद नसल्यामुळें भुजास कोटि व कोटीस भुज अशीं नांवें देऊन आणि य = इष्ट संख्या धरून

कर्ण भुज कोटि

$$\frac{\frac{क्ष^2}{इष्ट} + इष्ट}{२} \qquad क्ष \qquad \frac{\frac{क्ष^2}{इष्ट} - इष्ट}{२}$$

म्हणून भुज = क्ष आहे तर

$$कर्ण = \frac{\frac{भुज^2}{इष्ट} + इष्ट}{२}$$

$$आणि\ कोटि = \frac{\frac{भुज^2}{इष्ट} - इष्ट}{२}$$

∴ इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टेन निघ्नाद्द्विगुणाच्च कर्णादिष्टस्य कृत्येक-युजा यदाप्तं ॥ कोटिर्भवेत्सा पृथगिष्टनिघ्नी तत्कर्णयो-रन्तरमत्र बाहुः ॥

अर्थ—या श्लोकामध्यें जात्यत्र्यस्त्रांतील कर्ण दिला असतां भुज व कोटि काढण्याची रीति दिली आहे ती अशी—

प्रथम इष्टसंख्या धरून तिनें कर्णाच्या दुप्पटीस गुणावें, आणि जो गुणाकार येईल त्यास, इष्ट संख्येच्या वर्गामध्यें एक मिळवून जी संख्या होईल तिनें भागिलें असतां कोटीची किंमत येते. आणि कोटीस इष्टसंख्येनें गुणून जी संख्या येईल ती व कर्ण यांचें अंतर केलें असतां भुजाची किंमत येते.

उदाहरणम्—पंचाशीतिमिते कर्णे यौ यावकरणी-गतौ ॥ स्यातां कोटिभूजौ तौ तौ वद कोविद सत्वरम् ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणांतील कर्ण ८५ आहे त्या त्रिकोणांतील अकरणीगत असे कोटि व भुज अनेक सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या २ धरून

$$\text{कोटि} = \frac{८५ \times २ \times २}{(२)^{२} + १}$$

कोटि = ६८ हें उत्तर.

आणि भुज = २ × ६८ − ८५

∴ भुज = ५१ हें उत्तर

अथवा इष्टसंख्या ४ धरून

कोटि = ७५ }
भुज = ४० } हें उत्तर

याप्रमाणें इष्टसंख्या अनेक धरून अनेक उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

कर्ण	कोटि	भुज
$क्ष^2 + य^2$	२ क्ष य	$क्ष^2 - य^2$

असे अकरणीगत कल्पून प्रत्येकास $क्ष^2 + य^2$ या संख्येनें भागिलें असतां परस्परांतील प्रमाण बदलणार नाहीं करितां

कर्ण	कोटि	भुज
१	$\frac{२ क्ष य}{क्ष^2 + य^2}$	$\frac{क्ष^2 - य^2}{क्ष^2 + य^2}$

यांतील कोटि व भुज यांच्या अंशच्छेदांस $क्ष^2$ नें भागून

कर्ण	कोटि	भुज
१	$\frac{\frac{२ य}{क्ष}}{१ + \frac{य^2}{क्ष^2}}$	$\frac{१ - \frac{य^2}{क्ष^2}}{१ + \frac{य^2}{क्ष^2}}$

प्रत्येकास अ नें गुणून आणि

$\frac{य}{क्ष}$ = इष्ट धरून

कर्ण	कोटि	भुज
अ	$\frac{२ अ. इष्ट}{१ + इष्ट^2}$	$\frac{(१ - इष्ट^2) अ}{१ + इष्ट^2}$

∴ कर्ण = अ आहे तर

$$कोटि = \frac{२ कर्ण. इष्ट}{१ + इष्ट^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\text{आणि भुज} = \frac{(१ - \text{इष्ट}^२).\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२}$$

$$\therefore \quad \text{भुज} = \frac{\text{कर्ण} - \text{इष्ट}^२.\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२}$$

$$= \frac{\text{कर्ण} + \text{इष्ट}^२.\text{कर्ण} - २\ \text{इष्ट}^२.\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२}$$

$$= \frac{\text{कर्ण} + \text{इष्ट}^२.\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२} - \frac{२\ \text{इष्ट}^२.\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}\ (१ + \text{इष्ट}^२)}{१ + \text{इष्ट}^२} - \frac{२\ \text{इष्ट}^२.\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२}$$

$$= \text{कर्ण} - \frac{२\ \text{इष्ट}^२.\ \text{कर्ण}}{१ + \text{इष्ट}^२}$$

$$= \text{कर्ण} - \frac{२\ \text{कर्ण}.\ \text{इष्ट}}{१ + \text{इष्ट}^२}\ \text{इष्ट}$$

यांतील दुसऱ्या पदाचा गुणक हा, समीकरण (१) मधील कोटीच्या किंमतीबरोबर आहे म्हणून

भुज = कर्ण – कोटि. इष्ट .... (२)

म्हणून (१) व (२) यांवरून

इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टवर्गेण सैकेन द्विघ्नः कर्णोऽथवा हृतः ॥
फलोनः श्रवणः कोटिः फलमिष्टगुणं भुजः ॥

अर्थ —समीकरण स्वरूपानें देतों.

$$\frac{२ \text{ कर्ण}}{\text{इष्ट}^२ + १} = \text{फल}$$

$$\text{कोटि} = \text{कर्ण} - \text{फल}$$

$$\text{भुज} = \text{फल} \times \text{इष्ट}$$

उपपत्ति.

कर्ण	भुज	कोटि
$क्ष^२ + य^२$	२ क्ष य	$क्ष^२ - य^२$

असे अकरणीगत कर्णादि कल्पून प्रत्येकास $क्ष^२ + य^२$ यानें भागिलें असतां परस्परांतील प्रमाण बदलणार नाहीं करितां

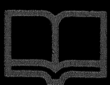
कर्ण	भुज	कोटि
१	$\frac{२ क्ष य}{क्ष^२ + य^२}$	$\frac{क्ष^२ - य^२}{क्ष^२ + य^२}$

येथें भुज व कोटि यांच्या अंशच्छेदांस $य^२$ नें भागून

कर्ण	भुज	कोटि
१	$\frac{\frac{२ क्ष}{य}}{\frac{क्ष^२}{य^२} + १}$	$\frac{\frac{क्ष^२}{य^२} - १}{\frac{क्ष^२}{य^२} + १}$

प्रत्येकास अनें गुणून व $\frac{क्ष}{य}$ = इष्ट धरून

कर्ण	भुज	कोटि
अ	$\frac{२ अ. इष्ट}{इष्ट^२ + १}$	$\frac{(इष्ट^२ - १) अ}{इष्ट^२ + १}$



आतां कर्ण = अ आहे आणि

$$\frac{२ अ}{इष्ट^{२} + १} = \text{फल संज्ञा दिली तर}$$

भुज = फल × इष्ट............ (१)

$$\text{आणि कोटि} = \frac{(इष्ट^{२} - १)\ कर्ण}{इष्ट^{२} + १}$$

$$\therefore \quad \text{कोटि} = \frac{इष्ट^{२}\ कर्ण - कर्ण}{इष्ट^{२} + १}$$

$$= \frac{इष्ट^{२}.\ कर्ण + कर्ण - २\ कर्ण}{इष्ट^{२} + १}$$

$$= \frac{कर्ण\ (इष्ट^{२} + १)}{इष्ट^{२} + १} - \frac{२\ कर्ण}{इष्ट^{२} + १}$$

$$= कर्ण - \frac{२\ कर्ण}{इष्ट^{२} + १}$$

= कर्ण − फल............ (२)

म्हणून समीकरण (१) व (२) यांपासून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टयोराहतिर्द्विघ्नि कोटिर्वर्गांतरं भुजः ॥ कृतियोगस्तयोरेव कर्णश्चाकरणीगतः ॥

अर्थ—ज्यांच्या योगानें जात्यत्र्यस्र तयार होईल असे भुज कोटि व कर्ण काढावयाची रीति देऊं.

दोन इष्टसंख्यांच्या गुणाकाराची दुप्पट केली असतां कोटि येते. त्याच दोन इष्टसंख्यांच्या वर्गांचें अंतर केलें असतां भुज

येतो. आणि त्याच दोन इष्टसंख्यांच्या वर्गाची बेरीज केली असतां अकरणीगत असा कर्ण येतो.

उदाहरणम्—यैर्यैस्त्र्यस्त्रं भवेज्जात्यं कोटिदोःश्रवणैः सखे ॥ त्रीनप्यविदितांस्तांस्तान्ब्रूहि क्षिप्रं विचक्षण ॥

अर्थ—ज्यांच्या योगानें जात्यत्र्यस्त्र तयार होईल असे अज्ञात भुज कोटि व कर्ण हे सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया

प्रथम इष्ट २ व १ अशा संख्या धरून,

$$\left.\begin{aligned} \text{कोटि} &= 2 \times 2 \times 1 = 4 \\ \text{भुज} &= (2)^2 - (1)^2 = 3 \\ \text{कर्ण} &= (2)^2 + (1)^2 = 5 \end{aligned}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

इष्ट २ व ३ धरून,

$$\left.\begin{aligned} \text{कोटि} &= 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ \text{भुज} &= (3)^2 - (2)^2 = 5 \\ \text{कर्ण} &= (3)^2 + (2)^2 = 13 \end{aligned}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

$$\text{कोटि}^2 = 4\ \text{क्ष}^2\ \text{य}^2$$

$$\text{भुज}^2 = \text{क्ष}^4 - 2\ \text{क्ष}^2\ \text{य}^2 + \text{य}^4$$

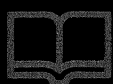
अशी कल्पना करून

$$\text{कर्ण}^2 = \text{क्ष}^4 + 2\ \text{क्ष}^2\ \text{य}^2 + \text{य}^4$$

$$\therefore\quad \text{कर्ण} = \text{क्ष}^2 + \text{य}^2$$

$$\text{भुज} = \text{क्ष}^2 - \text{य}^2$$

$$\text{कोटि} = 2\ \text{क्ष}\ \text{य}$$



येथें क्ष आणि य ह्या दोनी इष्ट संख्या आहेत म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

श्लोक—वंशाग्रमुलान्तरभूमिवर्गो वंशोद्धृतस्तेन पृथग्युतोनौ ॥ वंशौ तदर्धे भवतः क्रमेण वंशस्य खंडे श्रुतिकोटिरूपे ॥

अर्थ—वेळूचें अग्र व वेळूचें मूळ यामधील जें भूमीचें मान असेल त्याच्या वर्गास वेळूच्या उंचीनें भागावें, जो भागाकार येईल तो वेळूच्या उंचीमध्यें मिळवावा व वजा करावा; आणि त्यांचीं अर्धे केलीं असतां क्रमानें कर्णरूप व कोटिरूप अशीं वेळूचीं खंडें येतात.

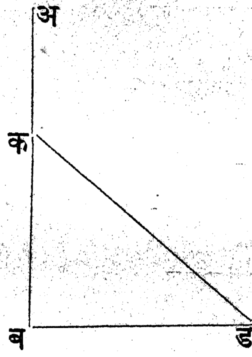
उदाहरणम्—यदि समभुवि वेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाणो गणक पवनवेगादेकदेशे स भग्नः ॥ भुवि नृपमितहस्तेष्वंग लग्नं तदग्रं कथय कतिषु मूलादेष भग्नः करेषु ॥

अर्थ—सपाट जमिनीवर ३२ हात उंचीचा वेळू उभा होता तो वाऱ्याच्या झपाट्यानें एका ठिकाणीं मोडून त्याचें अग्र जमिनीवर वेळूच्या मूळापासून १६ हातावर लागलें तर तो वेळू मूळापासून किति हात उंचीवर मोडला असावा हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

वेळूचें अग्र व वेळूचे मुळ यामधील भूमीचें मान १६ याचा वर्ग २५६ झाला. यास वेळूची उंची ३२ यानें भागून भागाकार ८ आला. ह्या वेळूच्या उंची ३२ मध्यें मिळवून व वजा करून ४० व २४ आले. यांचीं अर्धे २० व १२ झालीं; म्हणून मूळापासून १२ हात उंचीवर तो वेळू मोडला होता हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब, हा वेळु आहे, क, हें वेळु मोडण्याचें स्थळ, ड हें वेळूचें अग्र जमिनीवर लागलेलें स्थळ, आणि ब, हें वेळूचें मूळ समजा.

आतां अब = व; कब = य; कड = क्ष; आणि बड = भ अशा संज्ञा देऊन

$$क्ष^2 - य^2 = भ^2$$

$$\therefore (क्ष + य)(क्ष - य) = भ^2$$

$$\therefore क्ष - य = \frac{भ^2}{क्ष + य}$$

आणि क्ष + य = व .... (१)

$$\therefore क्ष - य = \frac{भ^2}{व}$$ .... (२)

समीकरण (१) व (२) याची बेरीज करून

$$2\ क्ष = व + \frac{भ^2}{व}$$

$$\therefore क्ष = \frac{व + \frac{भ^2}{व}}{२}$$

समीकरण (१) मधून (२) वजा करून

$$२ य = व - \frac{भ^2}{व}$$

$$\therefore य = \frac{व - \frac{भ^2}{व}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—स्तंभस्य वर्गोऽहिबिलांतरेण भक्तः फलं व्याल बिलान्तरालात् ॥ शोध्यं तदर्धप्रमितैः करैः स्याद्बिलाग्रतो व्यालकलापियोगः

अर्थ—खांबाच्या उंचीच्या वर्गास, सर्प व बिल यांच्या अंतरानें भागून जें फल येईल तें, सर्प व बिल यांच्या अंतरांतून वजा करून अर्ध केलें असतां जी संख्या होईल तत्तुल्य हातावर बिळापासून सर्प व मयूर यांचा संयोग होईल.

उदाहरणम्—अस्ति स्तंभतले बिलं तदुपरि क्रीडाशिखंडी स्थितः स्तंभे हस्तनवोच्छ्रिते त्रिगुणितस्तंभप्रमाणान्तरे ॥ दृष्ट्वाऽहिं बिलमाव्रजंत मपत त्तिर्यक्स तस्योपरि क्षिप्रं ब्रूहि तयोर्बिलात्कतिमितैः साम्येन गत्योर्युतिः॥

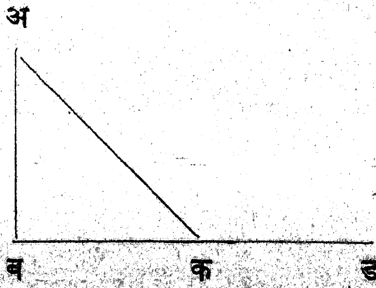
अर्थ—एक खांब ९ हात उंचीचा असा उभा होता त्याच्या तळास एक बिळ होतें व खांबाच्या अग्रावर एक मयूर बसलेला होता. त्यानें खांबाच्या तळापासून २७ हात अंतरावर एक सर्प बिळाकडे येत आहे असा पाहिला तेव्हां त्या

मयूरानें कर्णमार्गानें त्यावर झडप घातली. त्यांत मयूर व सर्प यांची गति समान आहे तर मयूरानें सर्पास बिळापासून किती अंतरावर पकडलें हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

खांबाची उंची ९ याचा वर्ग ८१ यास सर्प व बिल यामधील अंतर २७ यानें भागून फल ३ आलें हें २७ तून वजा करून २४ याचें अर्ध १२ आलें म्हणून बिळापासून १२ हात अंतरावर मोरानें सर्पास पकडलें हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब हा खांब, अ ह्या स्थळीं मयूर ब ह्या स्थळीं बिळ, ड स्थळीं सर्प, आणि क स्थळीं उभयतांची गांठ पडली असे समजा.

येथें अ ब = म;
अ क = क्ष
ब क = य

अशा संज्ञा देऊन

$$\text{क्ष}^2 - \text{य}^2 = \text{म}^2$$

$$(\text{क्ष} + \text{य})\ (\text{क्ष} - \text{य}) = \text{म}^2$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{भ}^2}{\text{क्ष} + \text{य}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

आतां अ क आणि क ड ह्या दोन्ही समान आहेत कारण उभयतांची गति समान आहे. ह्मणून

$$\text{क्ष} + \text{य} = \text{सर्प बिलांतर} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

ही किंमत (१) मध्यें ठेवून

$$\text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{भ}^2}{\text{सर्प बिलांतर}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

समीकरण (२) व (३) यांची वजाबाकी करून

$$२\ \text{य} = \text{सर्प बिलांतर} - \frac{\text{भ}^2}{\text{सर्प बिलांतर}}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{सर्प बिलांतर} - \dfrac{\text{स्तंभ}^2}{\text{सर्प बिलांतर}}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—भुजाद्वर्गितात्कोटिकर्णान्तराप्तं द्विधा कोटिकर्णांतरेणोनयुक्तम् ॥ तदर्धे क्रमात्कोटिकर्णौ भवेतामिदं धीमता वेत्स सर्वत्र योज्यम् ॥ सखे पद्म तन्मज्जन स्थानमध्यं भुजः कोटिकर्णांतरं पद्म दृश्यम् नलः कोटिरेतन्मितं स्याद्यतोऽभो वदैवं समानीय पानीयमानम् ॥

अर्थ—भुजाच्या वर्गास कर्ण व कोटि यांच्या अंतरानें

भागून जें लब्ध येईल तें दोन ठिकाणीं मांडावें. आणि त्यांतील एका ठिकाणीं कर्ण व कोटि यांचें अंतर वजा करावें व दुसऱ्या ठिकाणीं मिळवावें. नंतर त्यांचीं अर्धें केलीं असतां क्रमानें कोटि व कर्ण यांच्या किंमती येतात.

जलपृष्ठास कमलाचा दांडा ज्या ठिकाणीं लागला आहे तें स्थल, व कमल ज्या ठिकाणीं बुडालेलें दिसलें तें स्थल या मधील जें अंतर तो येथें भुज समजावा. जलपृष्ठावरील कमलाची जी उंची, तें कोटि व कर्ण यांचें अंतर होय. आणि जलपृष्ठापर्यंत जी कमलाच्या दांड्याची उंची ती कोटि समजावी.

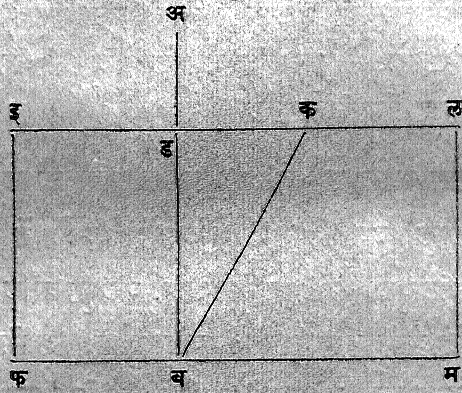
उदाहरणम्—चक्रक्रौंचाकुलितसलिले क्वापि दृष्टं तडागे तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणम् ॥ मंदं मंदं चलितमनिलेनाऽऽहतं हस्तयुग्मे तस्मिन्मग्नं गणक कथय क्षिप्रमम्बुप्रमाणम् ॥

अर्थ—चक्रवाकपक्षी आणि क्रौंचपक्षी यांनीं व्याप्त अशा एका तळ्यामध्यें कमलाची कळी पाहिली तिचें अग्र जलपृष्ठापासून एक वीतभर उंचीवर होतें. तें वाऱ्यानें हालल्यामुळें दोन हात अंतरावर बुडालें तर त्या तळ्यामध्यें पाण्याची उंची किती होती हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें भुज २ याचा वर्ग ४ यास कर्ण व कोटी यांचें अंतर $\frac{१}{२}$ यानें भागून लब्धि ८ आली. यामध्यें $\frac{१}{२}$ वजा करून व मिळवून $\frac{१५}{२}$ व $\frac{१७}{२}$ आले यांचीं अर्धें $\frac{१५}{४}$ व $\frac{१७}{४}$ झालीं म्हणून $\frac{१५}{४}$ ही जलाची उंची झाली हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें इ फ म ल हें तळें, इ ड कल हें जलपृष्ठ, अ ब हें कमल, क हें कमल बुडालेलें स्थळ समजावें.

$$डक = भुज = भ$$

$$बक = कर्ण = क्ष$$

$$बड = कोटि = य$$

अशा संज्ञा देउन

$$क्ष^2 - य^2 = भ^2$$

$$\therefore (क्ष + य)(क्ष - य) = भ^2$$

$$\therefore क्ष + य = \frac{भ^2}{क्ष - य}$$

$$क्ष - य = \frac{1}{2} = ब \text{ धरून}$$

$$क्ष + य = \frac{भ^2}{ब}$$

वरील दोन्ही समीकरणांची बेरीज व वजाबाकी करून

$$२ क्ष = \frac{भ^{२}}{व} + व$$

$$२ य = \frac{भ^{२}}{व} - व$$

अशीं दोन समीकरणें झालीं

$$\therefore क्ष = \frac{\frac{भ^{२}}{व} + व}{२}$$

$$य = \frac{\frac{भ^{२}}{२} - व}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली

श्लोक—द्विनिघ्नतालोच्छ्रितिसंयुतं यत्सरोंतरं तेन विभाजितायाः ॥ तालोच्छ्रितेस्तालसरोंतरघ्न्या उड्डीयमानं खलु लभ्यते तत् ॥

अर्थ—तालवृक्षाच्या उंचीच्या दुप्पटीमध्यें वृक्षापासून विहिरीचें जें अंतर असेल तें मिळवून जी बेरीज होईल, तिनें तालवृक्षाची उंची व विहिरीचें अंतर यांच्या गुणाकारास भागिलें असतां उड्डीयमान येतें.

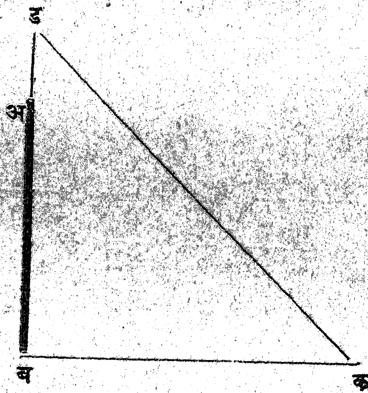
उदाहरणम्—वृक्षाद्धस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगे वापीं कापिः कोऽप्यगादुत्तीर्याथ परो द्रुतं श्रुतिपथात्प्रोड्डीय किंचिद्द्रुमात् ॥ जातैवं समाता तयोर्यदि गतावुड्डीयमानं कियद्विद्वंश्चेत्सुपरिश्रमोऽस्ति गणिते क्षिप्रं तदाचक्ष्व मे ॥

अर्थ—१०० हात उंचीचा एक तालवृक्ष होता. त्या वृक्षापासून २०० हात लांबीवर विहीर होती. आणि त्या तालवृक्षाच्या शेंड्यावर दोन वानर बसले होते. त्यांपैकीं एक वानर वृक्षावरूनच खालीं उतरून विहिरीकडे जाण्यास निघाला व दुसरा वानर कांहीं उड्डाण करून कर्णमार्गानें विहिरीकडे जाण्यास निघाला. त्या दोघांचें गतिसाम्य होऊन विहिरीवर पोंचलें तर दुसऱ्या वानरानें उड्डाण किती केलें हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

तालवृक्षाची उंची १०० हिची दुप्पट २०० यांत विहिरीचें अंतर २०० मिळवून ४०० झाले. या संख्येनें विहिरीचें अंतर २०० व वृक्षाची उंची १०० यांचा गुणाकार २०००० यास भागून ५० लब्धि आली म्हणून ५० उड्डीयमान हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब हा तालवृक्ष, क या स्थळीं विहिर, अ या स्थळीं दोन वानर बसले आहेत अ ड हे उड्डीयमान आहे असें समजा.

येथें $अ ड = क्ष$

$अ ब = य$

$ब क = ज्ञ$

$ड क = क$

याप्रमाणें संज्ञा देऊन.

$$(क्ष + य)^{२} + ज्ञ^{२} = क^{२}$$

$$\therefore क्ष^{२} + २क्ष य + य^{२} + ज्ञ^{२} = क^{२} \ldots\ldots (१)$$

दोघांची गति समान आहे.

$$\therefore य + ज्ञ = क्ष + क$$

$$\therefore क = य + ज्ञ - क्ष$$

दोन्ही पक्षांचा वर्ग करून

$$क^{२} = य^{२} + ज्ञ^{२} + क्ष^{२} + २य ज्ञ - २क्ष य - २क्ष ज्ञ$$

या समीकरणांतून समीकरण (१) वजा करून,

$$२ य ज्ञ - २ क्ष य - २ क्ष य - २ क्ष ज्ञ = ०$$

$$\therefore २ य ज्ञ - ४ क्ष य - २ क्ष ज्ञ = ०$$

२ या संख्येनें भागून

$$य ज्ञ - २ क्ष य - क्ष ज्ञ = ०$$

$$\therefore २ क्ष य + क्ष ज्ञ = य ज्ञ$$

$$\therefore क्ष (२ + ज्ञ) = य ज्ञ$$

$$\therefore क्ष = \frac{य ज्ञ}{२ य + ज्ञ}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—कर्णस्य वर्गाद्द्विगुणाद्विशोध्यो दोष्कोटियोगः स्वगुणोऽस्य मूलम् ॥ योगो द्विधा मूलविहीनयुक्तः स्यात् तदर्धे भूजकोटिमाने ॥

अर्थ—समीकरणरूपानें देऊं.

$$\text{भुज} = \frac{\text{भुजकोटियोग} - \sqrt{२\ \text{कर्ण}^{२} - \text{भुजकोटियोग}^{२}}}{२}$$

$$\text{कोटि} = \frac{\text{भुजकोटियोग} + \sqrt{२\ \text{कर्ण}^{२} - \text{भुजकोटियोग}^{२}}}{२}$$

उदाहरणम्—दश सप्ताधिकाः कर्णस्त्र्यधिका विंशतिः सखे ॥ भुजकोटियुतिर्यत्र तत्र ते मे पृथग्वद ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणामध्यें कर्ण १७ आहे व भुजकोटियोग २३ आहे तर भुज व कोटि यांची पृथक् मानें काय आहेत हें सांग !

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

मागें दिलेल्या सारणीमध्यें उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून.

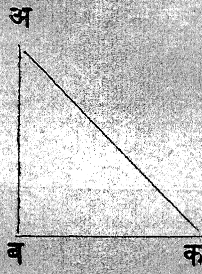
$$\text{भुज} = \frac{२३ - \sqrt{२(१७)^{२} - (२३)^{२}}}{२}$$

$$\text{भुज} = \frac{२३ - ७}{२} = ८ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{कोटि} = \frac{२३ + \sqrt{२(१७)^{२} - (२३)^{२}}}{२}$$

कोटि = १५ हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब, ही कोटि, ब क हा भुज आणि अ क, हा कर्ण समजा.

येथें अ ब = क्ष

ब क = य

अ क = क

अशा संज्ञा देऊन

भुज कोटि योग = क्ष + य = ब धरून $क्ष^2 + य^2 = क^2$

उभयपक्षांस २ नें गुणून

$२ क्ष^2 + २ य^2 = २ क^2$ .... (१)

आतां क्ष + य = ब

या समीकरणांतील उभयपक्षाचा वर्ग करून

$क्ष^2 + य^2 + २ क्ष य = ब^2$ .... (२)

समीकरण (१) व (२) यावरून

$(२ क्ष^2 + २ य^2) - (क्ष^2 + य^2 + २ क्ष य) = २ क^2 - ब^2$

$\therefore \quad क्ष^2 + य^2 - २ क्ष य = २ क^2 - ब^2$

उभयपक्षांची मूळें काढून

$$\text{क्ष} - \text{य} = \sqrt{२\text{क}^{२} - \text{ब}^{२}}$$

$$\text{क्ष} + \text{य} = \text{ब}$$

या दोन समीकरणावरून

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ब} + \sqrt{२\text{क}^{२} - \text{ब}^{२}}}{२}$$

$$\text{य} = \frac{\text{ब} - \sqrt{२\text{क}^{२} - \text{ब}^{२}}}{२}$$

$$\therefore \text{कोटि} = \frac{\text{भुजकोटियोग} + \sqrt{२\ \text{कर्ण}^{२} - \text{भुजकोटियोग}^{२}}}{२}$$

$$\text{भुज} = \frac{\text{भुजकोटियोग} - \sqrt{२\ \text{कर्ण}^{२} - \text{भुजकोटियोग}^{२}}}{२}$$

ह्मणून इष्टसिद्धि झाली.

वरील सारणीमध्यें भुजकोटियोगाचे जागीं भुजकोटयंतर असलें तरी भुज व कोटि यांच्या किंमती येतात.

उदाहरणम्—दोष्कोट्योरंतरं शैलाः कर्णो यत्र त्रयोदश ॥ भुजकोटी पृथक्तत्र वदाऽऽशु गणकोत्तम ॥

अर्थ—कर्ण १३ व भुजकोट्यंतर ७ आहे तर भुज कोटी यांच्या पृथक् किंमती सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{भुज} = \frac{७ - \sqrt{२(१३)^{२} - (७)^{२}}}{२}$$

$$= -५ \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{कोटि} = \frac{७ + \sqrt{२(१३)^{२} - (७)^{२}}}{२}$$

$$= १२ \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोक—अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगाद्वेण्वोर्वधे योगहृते च लंबः ॥ वंशौ स्वयोगेन हृतावभीष्टभूघ्नौ च लंबोभयतः कुखण्डे ॥

अर्थ—दोन उभे असलेल्या वेळूंच्या ज्या उंची असतील त्यांच्या गुणाकारास त्यांच्याच बेरजेनें भागिलें असतां परस्पर मूलाग्रगत सूत्रांच्या योगापासून भूमीपर्यंत काढलेल्या लंबाची किंमत येते.

दोन्ही वेळूंच्या उंचीस पृथक्, वेळूंच्या उंचींच्या बेरजेनें भागून इष्टभूमीनें (दोन वेळू मधील अंतरानें) गुणिले असतां लंबाच्या दोन्ही बाजूकडील भूमीचीं खंडें येतात.

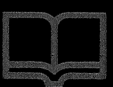
उदाहरणम्—पंचदश दशकरोच्छ्रायवेण्णोरज्ञातमध्यभूमिकयोः ॥ इतरेतरमूलाग्रगसूत्रयुतेर्लंबमानमाचक्ष्व ॥

अर्थ—सपाट जमिनीवर १९ हात उंचीचा व १० हात उंचीचा असे दोन वेळू कांहीं अंतरावर उभे केलेले आहेत. त्यांतील एका वेळूच्या अग्रापासून दुसऱ्या वेळूच्या मूलापर्यंत सूत्र बांधिलें व तसेंच पहिल्याच्या मूलापासून दुसऱ्याच्या अग्रापर्यंत सूत्र बांधिलें आणि बांधलेल्या दोन सूत्रांचा संयोग ज्या ठिकाणीं झाला आहे त्यापासून भूमीपर्यंत लंब काढिला आहे त्या लंबाची किंमत काय? आणि दोन वेळूमधील अंतरभूमी इष्ट धरून लंबाच्या दोन्ही बाजूंस अंतरभूमीच्या खंडांच्या किंमती काय येतील हें सांग?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

$$\text{लंब} = \frac{१५ \times १०}{१५ + १०} = ६ \text{ हें उत्तर.}$$

अंतरभूमी ५ इष्ट धरून



$$\text{प्रथमखंड} = \frac{१५ \times ५}{१५ + १०} = ३ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{द्वितीयखंड} = \frac{१० \times ५}{१५ + १०} = २ \text{ हें उत्तर.}$$

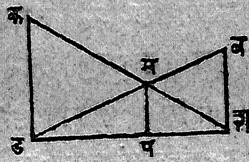
अंतर भूमी २० इष्ट धरून

$$\text{प्रथमखंड} = \frac{१५ \times २०}{१५ + १०} = १२ \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{द्वितीयखंड} = \frac{१० \times २०}{१५ + १०} = ८ \text{ हें उत्तर}$$

याप्रमाणें अनेक इष्ट धरून खंडांच्या किंमती अनेक येतील परंतु सर्वत्र लंबाची किंमत एकच येते.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें क ड हा एक वेळू; ब श हा दुसरा वेळू; क श हें बांधलेलें सूत्र; ब ड हें बांधलेलें दुसरें सूत्र; त्या दोन्ही सूत्रांचा संयोग म या स्थळीं झाला, व त्यापासून म प हा लंब भूमीवर टाकलेला आहे असें समजा.

येथें क ड = अ

ब श = ब

म प = ल

ड श = भ

ड प = क्ष

आणि प श = य

अशा संज्ञा देऊन.

ड प म, आणि ड श व हे दोन त्रिकोण सरूप असल्यामुळें आणि श प म, आणि श ड क, हे दोन त्रिकोण सरूप असल्यामुळें

$$\frac{क्ष}{ल} = \frac{क्ष + य}{ब}$$

$$\frac{य}{ल} = \frac{क्ष + य}{अ}$$

या दोन समीकरणांची बेरीज करून

$$\frac{क्ष + य}{ल} = \frac{क्ष + य}{ब} + \frac{क्ष + य}{अ}$$

$$= \frac{अ क्ष + अ य + ब क्ष + ब य}{अ ब}$$

$$= \frac{क्ष (अ + ब) + य (अ + ब)}{अ ब}$$

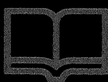
$$= \frac{(क्ष + य)(अ + ब)}{अ ब}$$

उभयपक्षांस क्ष + य ह्यानें भागून

$$\frac{१}{ल} = \frac{अ + ब}{अ . ब}$$

$$\therefore \quad ल = \frac{अ ब}{अ + ब} \quad .... \; .... \; .... \; .... \; (१)$$

आतां $\frac{अ}{म} = \frac{ल}{य}$



$$\therefore \quad य = \frac{म . ल}{अ}$$

यांत समीकरण (१) मधील (ल) ची किंमत ठेवून.

$$य = \frac{म . ब}{अ + ब} \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad ....(२)$$

$$आणि \quad \frac{ब}{म} = \frac{ल}{क्ष}$$

$$\therefore \quad क्ष = \frac{म . ल}{ब}$$

यांत समीकरण (१) मधील (ल) ची किंमत ठेवून.

$$क्ष = \frac{म . अ}{अ + ब} \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... (३)$$

म्हणून समीकरण (१), (२), व (३), यांपासून इष्ट-सूत्रसिद्धि झाली.

सूत्रम्—धृष्टे दिष्टऋजुभुजं क्षेत्रं यत्रैकबाहुतः स्वल्पा ॥ तदितरभुजयुतिरथवा तुल्या ज्ञेयं तदक्षेत्रम् ॥

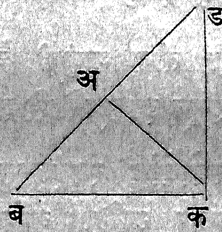
अर्थ—त्रिकोणांतील दोन बाजूंची बेरीज, तिसऱ्या बाजूपेक्षां कमी किंवा तिसऱ्या बाजूबरोबर दिली असतां तें उदाहरण खोटें आहे म्हणून सांगावें. असाच नियम चतुरस्रादिकाचे ठिकाणींही समजावा.

उदाहरणम्—चतुरस्रे द्विषट्त्र्यर्का भुजारूयस्रे त्रिषण्णव ॥ उद्दिष्टा यत्र धृष्टेन तदक्षेत्रं विनिर्दिशेत् ॥

अर्थ—एखाद्या उदाहरणांत एका धृष्टानें (मुर्खानें) असें सांगितलें कीं, २, ६, ३, १२ अशा बाजू एका चतुरस्राच्या

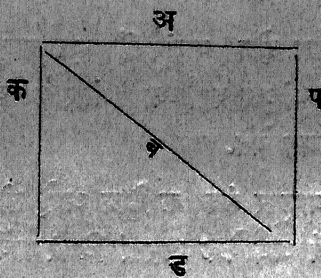
आहेत. व ३. ६. ९ अशा बाजू एका त्रिकोणाच्या आहेत. या सांगण्यामध्यें चतुरस्र किंवा त्रिकोण क्षेत्रच बनत नाहीं, खोटें उदाहरण आहे असें सांगावें.

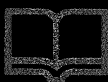
उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब क ह्या त्रिकोणाची अ ब बाजू ड बिंदुपर्यंत अशी वाढविली आहे कीं अ क आणि अ ड ह्या दोन्ही बाजू समान होतील.

आतां अ क आणि अ ड बाजू समान आहेत म्हणून अ क ड आणि अ ड क हे दोन्ही कोन समान आहेत म्हणून ब ड क कोनापेक्षां ब क ड कोन मोठा झाला म्हणून ब क बाजूपेक्षां ब ड बाजू मोठी असली पाहिजे. आणि ब ड बाजू ही अ ब आणि अ क ह्या दोन बाजूबरोबर आहे म्हणून त्रिकोणांतील दोन बाजूंची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असते. कमी अथवा बरोबर असावयाची नाहीं हें सिद्ध झालें.





येथें प < अ + ब

ब < क + ड

∴ अ + ब < अ + क + ड

∴ प < अ + क + ड

म्हणून चतुरस्रामध्येंही तीन बाजूंची बेरीजही चवथ्या बाजूपेक्षां मोठी असते. म्हणून इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

श्लोक—त्रिभुजे भुजयोर्योग स्तदंतरगुणो भुवा हृतो लब्ध्या ॥ द्विष्ठा भूरूनयुता दलिता बाधे तयो स्यातां ॥ स्वाबाधाभुजकृत्योरंतर मूलं प्रजायते लंबः ॥ लंबगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजेफलं भवति॥

अर्थ—कोणत्याही त्रिकोणामध्यें दोन बाजूंच्या बेरजेस त्याच दोन बाजूंच्या अंतरानें गुणावें. आणि आलेल्या गुणाकारास तिसऱ्या बाजूनें भागून जें फल येईल तें तिसऱ्या बाजूमध्यें वजा करावें व मिळवावें आणि त्यांचीं अर्धे केलीं असतां आबाधा येतात. आबाधा म्हणजे तिसऱ्या बाजूवर त्याच बाजू समोरील जो कोणबिंदु त्यापासून काढलेला जो लंब, त्या लंबाच्या दोन्ही बाजूस जीं तिसऱ्या बाजूचीं खंडें होतात तीं समजावीं.

आरंभीं घेतलेल्या दोन बाजूंपैकीं एक बाजू व त्या बाजूकडील आबाधा यांच्या वर्गांच्या अंतराचें वर्गमूळ काढिलें असतां लंबाची किंमत येते.

लंब व ज्या बाजूवर लंब काढिला आहे ती बाजू (भूमी) यांच्या गुणाकाराचें अर्ध केलें असतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल येतें.

उदाहरणम्—क्षेत्रे महीमनुमिता त्रिभुजे भुजौतु यत्र त्रयोदशतिथिप्रमितौच मित्र ॥ तत्रावलंबकमितिंकथयावधे च क्षिप्रंतथा च समकोष्ठमितिंफलाख्यां ॥

अर्थ—ज्या त्रिकोणांतील तीन भुजांचीं मानें १३, १५, व १४ अशीं आहेत. यांतील भुज १४ यावर याच्या समोरील कोणबिंदुपासून काढलेल्या लंबाची किंमत, आबाधांची किंमत, व त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया

भुज १३ व १५ यांची बेरीज २८ व अंतर २ झालें. बेरजेस अंतरानें गुणून ५६ यास तिसरी बाजू १४ हिनें भागून फल ४ आलें. हें तिसऱ्या बाजू १४ मध्यें वजा करून व मिळवून १० व १८ यांचीं अर्धें ५ व ९ आलीं म्हणून ५ व ९ ह्या आबाधा झाल्या हें उत्तर.

भुज १३ व आबाधा ५ यांचे वर्ग १६९ व २५ यांचें अंतर १४४ याचें वर्गमूळ १२ आलें म्हणून लंबाची किंमत १२ हें उत्तर.

लंब १२ व तिसरी बाजू १४ याच्या गुणाकाराचें अर्ध ८४ आलें म्हणून त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ ८४ हें उत्तर.

अन्य उदाहरणम्—दशसप्तदशप्रमौ भुजौ त्रिभुजे यत्र नवप्रमामही ॥ अबधे वद लंबकंतथा गणितंगाणितिका शुतत्रमे ॥

अर्थ—ज्या त्रिकोणांतील भुजांचीं मानें १०, १७, व ९ अशीं आहेत. यांतील भुज ९ यावर याच्या समोरील कोणबिंदुपासून काढलेल्या लंबाची किंमत आबाधाच्या किंमती व त्रिकाणाचें क्षेत्रफल काय हें सांग.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

भुज १० व १७ यांची बेरीज २७ हिला त्यांच्याच अंतरानें ७ गुणून १८९ यास तिसऱ्या बाजूनें भागून फल २१ आलें. हें तिसऱ्या





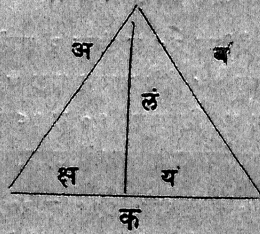
बाजू ९ मध्यें वजा करून व मिळवून ऋण १२ व धन ३० यांचीं अर्धीं ऋण६ व धन १५ ह्या आबाधा झाल्या हें उत्तर.

भुज १० व आबाधा ऋण ६ यांच्या वर्गांचें अंतर ६४ याचें वर्गमूळ ८ ही लंबाची किंमत आली हें उत्तर.

लंब ८ व तिसरी बाजू ९ यांच्या गुणाकाराचें अर्ध ३६ आलें म्हणून तें त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ झालें हें उत्तर.

आतां या मागें दिलेल्या रीतीची उपपत्ति देऊं.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब क ह्या बाजू त्रिकोणाच्या आहेत, यांतील क बाजूस भूमी म्हणण्याचा संप्रदाय आहे. आणि क बाजूवर तिच्या समोरील कोणबिंदूपासून काढलेल्या लंबानें क बाजूचे जे दोन तुकडे झाले आहेत यांस आबाधा ह्मणण्याचा संप्रदाय आहे त्या आबाधांस क्ष आणि य अशीं नांवें दिलीं आहेत असें समजा.

आतां $\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2 = \text{लं}^2$

आणि $\text{ब}^2 - \text{य}^2 = \text{लं}^2$

$$\therefore \quad \text{अ}^2 - \text{क्ष}^2 = \text{ब}^2 - \text{य}^2$$

$$\therefore \quad \text{क्ष}^2 - \text{य}^2 = \text{अ}^2 - \text{ब}^2$$

$$\therefore \quad (\text{क्ष} - \text{य})(\text{क्ष} + \text{य}) = \text{अ}^2 - \text{ब}^2$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क्ष} + \text{य}}$$

आतां $\text{क्ष} + \text{य} = \text{क}$ आहे ....(१)

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}} \quad \text{....................(२)}$$

या दोन समीकरणांच्या बेरजेवरून

$$२ \text{ क्ष} = \text{क} + \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{क} + \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}}{२}$$

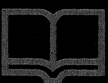
$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{क} + \frac{(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब})}{\text{क}}}{२} \quad \text{....(३)}$$

समीकरण (१) व (२) यांची वजाबाकी करून

$$२ \text{ य} = \text{क} - \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}$$

$$= \text{क} - \frac{(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब})}{\text{क}}$$

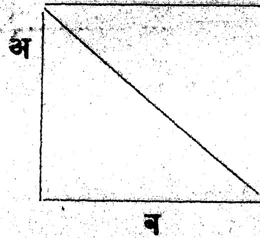
$$\therefore \text{य} = \frac{\text{क} - \frac{(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब})}{\text{क}}}{२} \quad \text{....(४)}$$



आतां $अ^२ - क्ष^२ = ल^२$

$ब^२ - य^२ = ल^२$ आहे

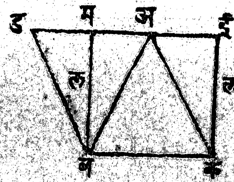
$\therefore \quad ल = \sqrt{भुज^२ - आबाधा^२}$ .... (५)



येथें अ × ब = समचतुरस्त्र क्षेत्रफळ

$\therefore \quad \frac{अ \times ब}{२}$ = त्रिकोणक्षेत्रफळ. .... (६)

अथवा खालीं दिलेल्या आकृतीमध्यें



अ ब क त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढणें आहे.

ब क = क्ष धरून

ब क × ई क = म ब क ई चतुरस्त्राचें फळ

$\therefore$ क्ष × ल = म ब क ई चतुरस्त्राचें फळ.

आतां म ब क ई = अ ड ब क

कारण समांतर रेषांच्या जोडांत दोन्हीं चतुरस्त्रें आहेत.

आणि अ ड ब क याचा कर्ण अ ब आहे म्हणून

अ ड ब = अ ब क

$$\frac{\text{अडबक चतुरस्र}}{२} = \text{अ ब क त्रिकोण.}$$

$$\therefore \text{अ ब क त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ} = \frac{\text{क्ष} \times \text{ल}}{२} \ldots.(७)$$

म्हणून समीकरणें (३), (४), (५), (६) आणि (७) यांवरून इष्टसूत्राची सिद्धि झाली.

श्लोक—सर्वदोर्युतिदलंचतुः स्थितंबाहुभिर्विरहितं च तद्धतेः ॥ मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेव मुदितं त्रिबाहुके ॥

अर्थ—सर्व भुजांच्या बेरजेचें अर्ध चार ठिकाणीं मांडून त्यांतून एकेक भुज वजा करून त्यांचा गुणाकार केला असतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ येतें आणि वृत्तस्थ चतुरस्राचें क्षेत्रफळ याच रीतीनें येतें परंतु वृत्तस्थचतुरस्रावांचून अन्य चतुरस्राचें क्षेत्रफळ या रीतीनें बरोबर येत नाहीं.

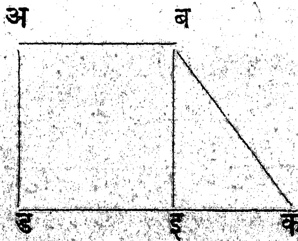
उदाहरणम्—भूमिश्चतुर्दशकरा मुख मंकसंख्यं बाहूत्रयोदशदिवाकरसंमितौच ॥ लंबोपियत्ररविसंख्यक एवतत्र क्षेत्रेफलंकथय तत्कथितंयदाद्यैः ॥

अर्थ—चतुरस्राची भूमि म्हणजे खालची बाजू १४ हात, मुख म्हणजे वरची बाजू ९ हात, तिसरी बाजू १३ हात आणि चवथी बाजू १२ हात आहे व लंब १२ हात आहे या चतुरस्राचें क्षेत्रफळ सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

चतुरस्रांतील बाजू १४।१३।१२।९ यांची बेरीज ४८ हिचें अर्ध २४ यांतून प्रत्येक भुज वजा करून १०।११।१२।१५ हीं शेषें राहिलीं यांचा गुणाकार १०×११×१२×१५=१९८०० याचें आसन्न वर्गमूल १४९ आहे हें दिलेल्या रीतीनें चतुरस्राचें क्षेत्रफळ झालें. परंतु हें क्षेत्रफळ चुकीचें आहे कारण दिलेलें चतुरस्र वृत्तस्थ नाहीं.

दिलेल्या चतुरस्राचें खरें क्षेत्रफल किती येतें हें काढून दाखवूं.



या आकृतीमध्यें अ ब क ड ह्या चतुरस्रांतील अ ब ९, ब क १३, ड क १४, अ ड १२ आणि ब ई लंब १२ अशीं प्रमाणें दिलीं आहेत

∴ १२ × ९ = १०८ हें अ ब ई ड या चतुरस्राचें क्षेत्रफल झालें.

आणि $\frac{१२ \times (१४ - ९)}{२} = ३०$

हें ब ई क त्रिकोणाचें क्षेत्रफल.

∴ १०८ + ३० = १३८ हें इष्ट चतुरस्राचें खरें क्षेत्रफल झालें.

आतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल दिलेल्या रीतीनें काढून दाखविण्याकरितां कल्पित उदाहरण देऊं.

ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू. १३।१५।१४ अशा आहेत तर त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफल काय ?

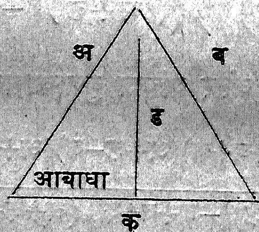
उत्तरनिष्काशनक्रिया.

बाजू १३।१५।१४ यांची बेरीज ४२ हिचें अर्ध २१ यांतून बाजू

वजा करून ८।६।७ आले. त्रिकोणास चवथी बाजू नसते म्हणून चवथ्या ठिकाणीं २१ तून शून्य वजा केले.

आतां ८ × ६ × ७ × २१ = ७०५६ याचें वर्गमूल ८४ हें त्रिकोणाचें क्षेत्रफल आलें हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें एका त्रिकोणाच्या अ ब क अशीं मानें आहेत व लंबाचें मान ड आहे.

आतां त्रिभुजेभुजयोर्योग इत्यादि श्लोकानें आबाधेची किंमत काढून

$$\text{आबाधा} = \frac{\text{क} + \dfrac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}}{२}$$

$\therefore \text{अ}^2 - \text{आबाधा}^2 = \text{ड}^2$

यांत आबाधेची किंमत ठेवून

$$\text{अ}^2 - \left(\frac{\text{क}^2 + \text{अ}^2 - \text{ब}^2}{२\,\text{क}}\right)^2 = \text{ड}^2$$

$$\therefore \left(\text{अ} - \frac{\text{क}^2 + \text{अ}^2 - \text{ब}^2}{२\,\text{क}}\right)\left(\text{अ} + \frac{\text{क}^2 + \text{अ}^2 - \text{ब}^2}{२\,\text{क}}\right) = \text{ड}^2$$

$$\therefore \left(\frac{२ अक - क^२ - अ^२ + ब^२}{२ क}\right)\left(\frac{२ अक + क^२ + अ^२ - ब^२}{२ क}\right) = ह^२$$

$$\left(\frac{ब^२ - (-२ अक + क^२ + अ^२)}{२ क}\right)\left(\frac{(२ अक + क^२ + अ^२) - ब^२}{२ क}\right) = ह^२$$

$$\therefore \left(ब^२ - (अ - क)^२\right)\left((अ + क)^२ - ब^२\right) = ४ क^२ ह^२$$

वर्गांतर हें योग व अंतर यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें.

$$\therefore (अ+ब-क)(-अ+ब+क)(अ+क-ब)(अ+क+ब) = ४ क^२ ह^२$$

$$\therefore ह = \frac{१}{२क}\sqrt{(अ+ब-क)(-अ+ब+क)(अ+क-ब)(अ+क+ब)}$$

हें लंबाचें मान आलें यास भूमीच्या अर्धानें गुणिलें असतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल येईल म्हणून—

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल =

$$\frac{क}{२} \cdot \frac{१}{२ क}\sqrt{(अ-क+ब)(-अ+ब+क)(अ+क-ब)(अ+ब+क)}$$

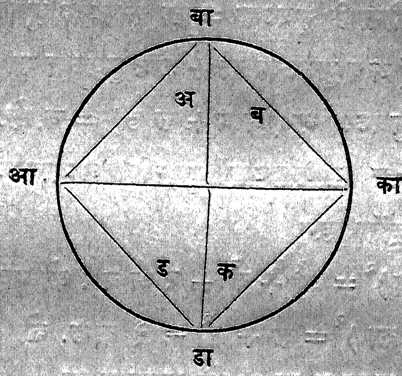
$$= \sqrt{\frac{(अ-क+ब)(-अ+ब+क)(अ+क-ब)(अ+ब+क)}{२ \times २ \times २ \times २}}$$

$\frac{अ + ब + क}{२} = स$ नांव देऊन

$$त्रिकोण क्षेत्रफल = \sqrt{(स - ०)(स - अ)(स - ब)(स - क)}$$

म्हणून त्रिकोण क्षेत्रफळाच्या रीतीची सिद्धी झाली.

आतां वृत्तस्थचतुरस्राच्या क्षेत्रफळाच्या रीतीची उपपत्ति देतों.



लंबगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति. ही सोपपत्तिक रीति मागें दिली आहे. यामध्यें लंबाची किंमत भुजज्या व कर्ण या पदांत आणून

$$\frac{\text{अ . ब . भुजज्या बा}}{२} = \text{आ बा का त्रिकोणाचें क्षेत्रफल.}$$

आणि $\frac{\text{क . ड . भुजज्या डा}}{२}$ = आ डा का

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल.

$$\therefore \frac{\text{अ ब . भुजज्या बा}}{२} + \frac{\text{क ड भुजज्या डा}}{२} =$$

आ बा का डा ह्या वृत्तस्थ चतुर्भुजाचें क्षेत्रफल.

$\therefore \frac{१}{२}$ (अ ब भुजज्या बा + क ड भुजज्या डा) = चतुरस्त्र क्षेत्रफल.

आतां रेखा गणिताच्या तृतीयाध्यायाच्या २२ व्या सिद्धांतावरून.

बा + डा = १८० अंश.

∴ बा कोनाची भुजज्या = डा कोनाची भुजज्या

∴ $\frac{१}{२}$ (अ ब भुजज्या बा + क ड भुजज्या बा) = च. क्षे. फ.

∴ $\frac{१}{२}$ भुजज्या बा (अ ब + क ड) = च. क्षे. फ. ....(१)

आतां रेखा गणिताच्या दुसऱ्या अध्यायाच्या १२ व्या सिद्धांतावरून

$(आ का)^२ = अ^२ + ब^२ - २ अ ब$. को भुजज्या बा.

व $(आ का)^२ = क^२ + ड^२ - २ क ड$. को भुजज्या डा.

को भुजज्या डा = को भुजज्या बा

∴ $(आ का)^२ = क^२ + ड^२ + २ क ड$. को भु . बा . ....(२)

∴ $क^२ + ड^२ + २ क ड$. को भु . बा $= अ^२ + ब^२ - २ अ ब$. को भु . बा

∴ २ क ड . को भु . बा + २ अ ब . को भु . बा $= अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२$

∴ २ कोभु . बा (क ड + अ ब) $= अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२$

$$को\ भु\ .\ बा = \frac{अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२}{२ (अ ब + क ड)} \quad ....(३)$$

त्रिकोणमितीवरून

$भुजज्या^२ बा + कोभुजज्या^२ बा = १$

∴ $भुजज्या^२ बा = १ - कोभुजज्या^२ बा$

यांत समीकरण (३) मधील किंमत ठेऊन

$$भु^२ . बा = १ - \left(\frac{अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२}{२ (अब + कड)}\right)^२$$

$$= \frac{(२ अब + २ कड)^२ - (अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२)^२}{४ (अब + कड)^२}$$

$$= \frac{\left\{२(अब+कड)+अ^२+ब^२-क^२-ड^२\right\}\left\{२(अब+कड)+क^२+ड^२-अ^२-ब^२\right\}}{४\ (अब + कड)^२}$$

$$= \frac{\left\{(क+ड)^२-(अ-ब)^२\right\}\left\{(अ+ब)^२-(क-ड)^२\right\}}{४\ (अब + कड)^२}$$

$$= \frac{(क+ब+ड-अ)(अ+क+ड-ब)(अ+ब+ड-क)(अ+ब+क-ड)}{४\ (अब + कड)^२}$$

येथें $\frac{अ + क + ब + ड}{२}$ = स धरून

$$भु^२ बा = \frac{(२स-२अ)(२स-२ब)(२स-२क)(२स-२ड)}{४\ (अब + कड)^२}$$

$$= \frac{१६\ (स-अ)(स-ब)(स-क)(स-ड)}{४\ (अब + कड)^२}$$

$$\therefore भु.\ बा = \frac{२\sqrt{(स-अ)(स-ब)(स-क)(स-ड)}}{अब + कड}$$

ही किंमत (१) समीकरणांत ठेवून

$$चतुरस्रक्षेत्रफल = \sqrt{(स-अ)(स-ब)(स-क)(स-ड)}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—चतुर्भुजस्यानियतौ हि कर्णौकथं ततोऽस्मिन्नियतं फलं स्यात् ॥ प्रसाधितौ तच्छ्रवणौ यदाद्यैः स्वकल्पितौ तावितरत्र न स्तः ॥ तेष्वेव बाहुष्वपरौ च कर्णावनेकधा क्षेत्रफलं ततश्च ॥

अर्थ—मागच्या श्लोकांतील रीति वृत्तस्थचतुरस्रांवाचून

अन्य चतुरस्राचें क्षेत्रफळ काढण्यास उपयोगी पडत नाहीं असें सांगितलें आहे त्याचें कारण असें आहे कीं, त्या चतुरस्राचे दोन्ही कर्ण अनियमित असतात तेंव्हां क्षेत्रफळ निश्चित कसें सांगतां येईल. येणार नाहीं हें उघड आहे. चतुरस्राचे जे भुज असतात तेच भुजसंकोचित (आंतल्या बाजूस दाबिले) केले असतां पहिल्या चतुरस्राचे जे कर्ण असतात तेच कर्ण दुसऱ्या भुज संकोचित चतुरस्राचे येत नाहींत भिन्न येतात. भुज मात्र पहिल्या चतुरस्राचे जे असतात तेच कायम राहून क्षेत्र निराळें होतें तेंव्हां क्षेत्रफलही निराळें होईल हें उघड आहे.

श्लोक—लंबयोः कर्णयोर्वैकमनिर्दिश्यापरान्कथम् ॥ पृच्छत्यनियतत्वेऽपि नियतं चापि यत्फलम् ॥ स पृच्छकः पिशाचो वा वक्ता वा नितरां ततः ॥ यो न वेत्ति चतुर्बाहौ क्षेत्रे ह्यनियतां स्थितिम् ॥

अर्थ—चतुरस्रांतील लंब किंवा कर्ण न सांगतां क्षेत्रफळ विचारिलें असतां जो नियत क्षेत्रफलाचें उत्तर देतो तो व पृच्छक हे पिशाच समजले पाहिजेत. कारण त्यांना चतुरस्रांतील अनियत स्थिति माहित नाहीं.

श्लोक—इष्टा श्रुतिस्तुल्यचतुर्भुजस्य कल्प्याऽथ तद्वर्गविवर्जिता या ॥ चतुर्गुणा बाहुकृतिस्तदीयं मूलं द्वितीय श्रवणप्रमाणम् ॥ अतुल्यकर्णाभिहतिर्द्विभक्ता फलं स्फुटं तुल्यचतुर्भुजे स्यात् ॥ समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च तथाऽऽयते तद्भुजकोटिघातः ॥ चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलंबे लंबेन निघ्नं कुमुखैक्यखंडम् ॥

अर्थ— समचतुर्भुजाचा भुज व एक कर्ण दिला असतां त्यांवरून दुसरा कर्ण काढण्याची रीति—

भुजवर्गाच्या चौपटींतून कर्णवर्ग वजा करून बाकीचें वर्ग मूळ काढिलें असतां दुसऱ्या कर्णाचें मान येतें.

समचतुर्भुजाच्या दोन्ही कर्णांवरून त्या समचतुर्भुजाचें क्षेत्र फल काढण्याची रीति.

दोन्ही कर्णांच्या गुणाकाराचें अर्ध केलें असतां समचतुर्भुजाचें क्षेत्रफल येतें.

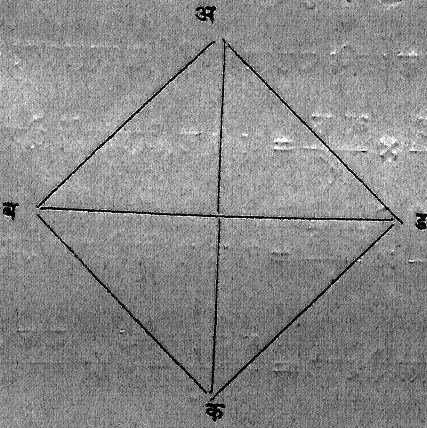
समकर्णसमचतुर्भुज व काटकोन चौकोन यांचें क्षेत्रफल काढण्याची रीति.

भुज व कोटि यांचा गुणाकार केला असतां इष्ट क्षेत्रफल येतें.

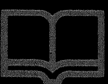
समांतर द्विभुज चतुरस्राचें क्षेत्रफल काढण्याची रीति.

भूमि (खालची बाजू) व मुख (वरची बाजू) यांच्या बेरजेच्या अर्धास लंबानें गुणिलें असतां इष्ट क्षेत्रफल येतें.

उपपत्ति.



अ ब क ड ह्या समचतुरस्रांतील अ क आणि ब ड ह्या कर्णांच्या किंमती काढूं.



$$\left(\frac{अक}{२}\right)^2 + \left(\frac{बड}{२}\right)^2 = अड^2$$

येथें अ क = आ

ब ड = डा

अ ड = बा

अशीं नांवें देऊन

$$\frac{आ^2}{४} + \frac{डा^2}{४} = बा^2$$

$\therefore डा^2 = ४ बा^2 - आ^2$

$\therefore डा = \sqrt{४ बा^2 - आ^2}$ ....

आणि $आ = \sqrt{४ बा^2 - डा^2}$ ....

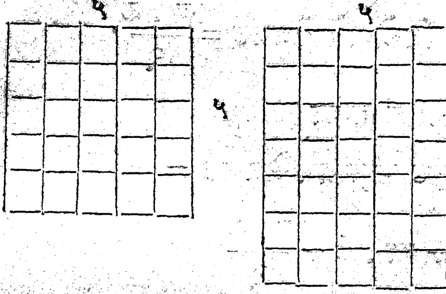
आतां अ क आणि ब ड ह्या दोन्ही रेषा परस्प

$\therefore \frac{बड}{२} \times \frac{अक}{२} =$ अ ब ड त्रिकोणाचें

व $\frac{बड}{२} \times \frac{अक}{२} =$ ब क ड त्रिकोणाचें

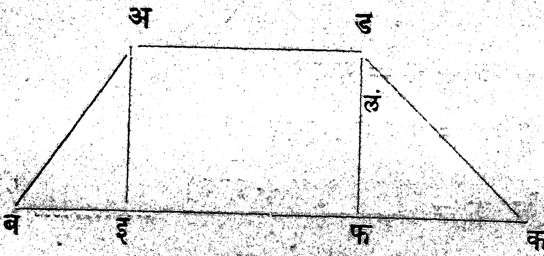
$\therefore$ चतुरस्र क्षेत्रफल $= \frac{बड . अक}{४} +$

$\therefore$ च. क्षे. फ $= \frac{बड \times अक}{२}$ .....



या आकृतीवरून सहज दिसून येईल, कीं भुज व कोटि यांच्या गुणाकाराबरोबरच आंतील कोष्टकें तयार झालीं आहेत.

∴ काटकोन चतुरस्त्रक्षेत्रफळ = भुज × कोटि .... (४)



अ ब क ड ह्या समांतर द्विभुज चतुरस्त्राचें क्षेत्रफल काढूं.

येथें ब ई = डा

अ ड = आ

आणि फ क = य

अशीं नांवें देऊन

अ ब ई त्रिकोणाचें क्षेत्रफल = $\frac{\text{लं . डा}}{२}$

अ ड फ ई चतुरस्त्राचें क्षेत्रफल = आ . ळ

ड फ क त्रिकोणाचें क्षेत्रफल = $\frac{\text{य . ल}}{२}$

सर्वांची बेरीज करून

अ ब क ड चतुरस्राचें क्षेत्रफल =

$\frac{\text{लं . डा}}{२} + \text{आ . लं} + \frac{\text{य . ल}}{२}$

$\therefore$ च. क्षे. फ. = $\frac{\text{लं . डा + २ आ . लं + य . ल}}{२}$

$\therefore$ च. क्षे. फ. = $\frac{\text{लं (डा + २ आ + य)}}{२}$

आ + डा + य = भूमि

आणि आ = मुख संज्ञादेऊन

च. क्षे. फ = $\frac{\text{लंब (भूमि + मुख)}}{२}$ .... (९)

म्हणून समीकरणें (१), (२), (३), (४) व (९) यांवरून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—क्षेत्रस्य पंचकृतितुल्यचतुर्भुजस्य कर्णौ ततश्च गणितं गणक प्रचक्ष्व ॥ तुल्यश्रुतेश्च खलु तस्य तथाऽऽयतस्य यद्विस्तृती रसमिताष्टमितं च दैर्घ्यम् ॥

अर्थ—समचतुर्भुज क्षेत्राचा भुज २९ आहे त्यांतील एक कर्ण इष्ट धरून दुसरा कर्ण काढून दाखीव ? व त्या चतुरस्राचे क्षेत्रफल सांग ? आणि ज्या काटकोन चौकोनाची रुंदी ६ हात व लांबी ८ हात आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{कर्ण} = \sqrt{४\,\text{भुज}^{२} - \text{इष्टकर्ण}^{२}}$$

यांत इष्टकर्ण ३० धरून व भुजाची किंमत दिलेली २५ ठेवून

$$\text{कर्ण} = \sqrt{४ \times ६२५ - ९००}$$

$\therefore$ कर्ण = ४० हें उत्तर.

$$\text{क्षेत्रफळ} = \frac{३० \times ४०}{२} = ६०० \text{ हें उत्तर.}$$

व काटकोन चौकोन क्षेत्रफल = ६ × ८ = ४८ हें उत्तर.

उदाहरणम्—क्षेत्रस्य यस्य वदनं मदनारितुल्यं विश्वंभराद्विगुणितेन मुखेन तुल्या ॥ बाहू त्रयोदशनखप्रमितौ च लंबः सूर्योन्मितश्च गणितं वद तत्र किं स्यात् ॥

अर्थ—ज्या समांतर द्विभुज चतुरस्राचें मुख (वरची बाजू) ११ व भूमि (खालची बाजू) २२ आणि अन्यदोन भुज १३।२० आहेत. व लंब १२ आहे त्या चतुरस्राचें क्षेत्रफळ काय तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{क्षेत्रफळ} = \frac{१२\,(११ + २२)}{२}$$

$\therefore$ क्षेत्रफळ = १९८ हें उत्तर.

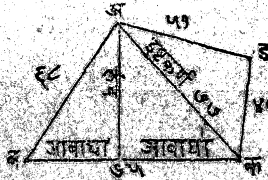
उदाहरणम्—पंचाशदेकसहिता वदनं यदीयं भूः पंचसप्ततिमिता च मितोऽष्टषष्ट्या ॥ सव्यो भुजो द्विगुणविंशतिसंमितोऽन्यस्तस्मिन्फलं श्रवणलंबमितीः प्रचक्ष्व ॥

अर्थ—विषमभुज चतुरस्राची एक बाजू ५१ दुसरी बाजू ७५ तिसरी बाजू (सव्यभुज) ६८ व चवथी बाजू (दक्षिणभुज) ४० आहे याचें क्षेत्रफल, कर्ण व लंब यांचीं मानें सांग?

हें उदाहरण सोडविण्यास पुढील सहा श्लोकांचा संबंध आहे त्यांचा अर्थ करीत असतां हें सोडवूं.

श्लोक--ज्ञातेऽवलंबे श्रवणः श्रुतौ तु लंबः फलं स्यान्नियतं हि तत्र ॥ चतुर्भुजांतस्त्रिभुजेऽवलंबः प्रागवद्भुजो कर्णभुजौ मही भूः

अर्थ—विषमभुज चतुरस्रामध्यें लंब दिला असतां कर्णाची किंमत काढितां येते व कर्ण समजला असतां लंब काढितां येतो. वर दिलेल्या उदाहरणांमध्यें कर्ण दिला नाहीं व लंबही दिला नाहीं ह्मणून दिलेल्या चतुरस्राचें क्षेत्रफळ निश्चित सांगतां येणार नाहीं जेथें कर्ण किंवा लंब दिला असतो तेथेंच निश्चित फळ सांगतां येतें करितां कर्णाची इष्ट किंमत धरून दिलेल्या चतुरस्रामध्यें कर्णाच्या योगानें जें त्र्यस्र बनेल त्यांतील लंबाची किंमत आणून दाखवितो या त्र्यस्रामध्यें कर्ण व सव्य बाजू हे दोन भुज व खालची बाजू ही भूमि धरून लंब आणावा जसें



येथें इष्ट कर्ण ७७ धरून अ ब क त्रिकोणांतील आबाधा व लंब यांच्या किंमती (त्रिभुजे भुजयोर्योग इत्यादि श्लोक रीतीनें) काढिल्या, त्या

$$\text{आबाधा} = \frac{१४४}{५}$$

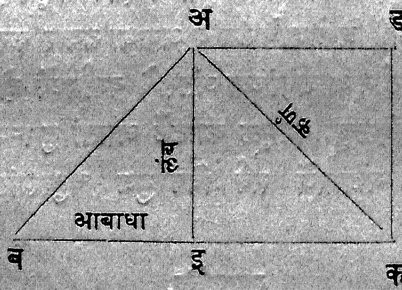
आबाधा = $\frac{२३१}{९}$

व लंब = $\frac{३०८}{९}$ हें उत्तर

श्लोक—यल्लंबलंबाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं कथिताऽवधा सा ॥ तदूनभूवर्गसमन्वितस्य यल्लंबवर्गस्य पदं स कर्णः ॥

अर्थ—विषमभुजचतुरस्रांतील लंब दिला असतां कर्ण काढण्याची रीति लंब व लंबाश्रित भुज यांच्या वर्गांच्या अंतराचें वर्गमूळ काढिलें असतां आबाधा येते. ती आबाधा भूमींतून वजा करून शेषाच्या वर्गामध्यें लंबाचा वर्ग मिळवावा म्हणजे कर्णाची किंमत येते.

उपपत्ति.



येथें ब क = भूमि

लं ब = ल

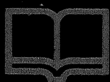
ब ई = आ

अ ब = म

अशा संज्ञा देऊन

$म^2 - ल^2 = आ^2$

$\therefore आ = \sqrt{म^2 - ल^2}$



$$\therefore (\text{भूमि} - \text{आ})^2 + \text{लं}^2 = \text{कर्ण}^2$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{(\text{भूमि} - \text{आ})^2 + \text{लं}^2}$$

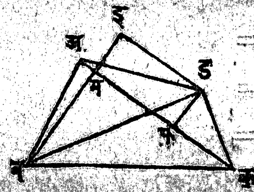
म्हणून इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

श्लोक– इष्टोऽत्र कर्णः प्रथमं प्रकल्प्य त्र्यस्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये ॥ कर्णं तयोः क्ष्मामितरौ च बाहू प्रकल्प्य लंबाववधाश्च साध्याः ॥ आबाधयोरेककुप्स्थयोर्यत्स्यादंतरं तत्कृतिसंयुतस्य ॥ लंबैक्यवर्गस्य पदं द्वितीयः कर्णो भवेत्सर्वचतुर्भुजेषु ॥

अर्थ—विषमभुजचतुरस्रांतील दुसरा कर्ण काढण्याची रीति.

प्रथम इष्टकर्ण कल्पून त्या कर्णानें चतुरस्रांत जे दोन त्रिकोण होतील. त्या मध्यें इष्ट कर्णास भूमी व इतर बाजूंस भुज कल्पना करून त्या दोन्ही त्रिकोणाचे लंब व अबाधा तयार कराव्या. नंतर एक दिशेच्या दोन आबाधांच्या अंतराचे वर्गामध्यें दोन लंबांच्या बेरजेचा वर्ग मिळवून वर्गमूळ काढिलें असतां दुसऱ्या कर्णाची किंमत येते. याप्रमाणें सर्व विषमभुज चतुरस्रांतील दुसरा कर्ण काढावा.

उपपत्ति.



अ ब क ड या चतुरस्रांत अ क हा इष्ट कर्ण, यावर ड फ आणि ब म हे दोन लंब काढिले आहेत व ब म हा लंब

इ बिंदूपर्यंत असा वाढविला आहे कीं, फ ड आणि म ई ह्या बाजू सारख्या होतील. यांत अ ब क त्रिकोणाच्या ब म लंबानें अ म ही आबाधा झाली, आणि अ ड क त्रिकोणाच्या ड फ लंबानें अ फ ही आबाधा झाली; या दोन्ही आबाधा एकदिशेच्या आहेत. यांचें अंतर म फ बाजू ही ई ड बाजूबरोबर आहे आणि दोन्ही लंब ब म आणि फ ड यांची बेरीज ही ब ई बाजूबरोबर आहे

$$\therefore \text{बई}^2 + \text{इड}^2 = \text{बड}^2$$

$$\therefore (\text{बम} + \text{मइ})^2 + (\text{अफ} - \text{अम})^2 = \text{बड}^2$$

$$\therefore \text{बड} = \sqrt{(\text{बम} + \text{फड})^2 + (\text{अफ} - \text{अम})^2}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{\text{लंबैक्य}^2 + \text{एक दिक्स्थ आबाधांतर}^2}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

आतां मागील उदाहरणांत ७७ इष्ट कर्ण धरून दोन्ही लंब ६० व २४ आणि दोन्ही आबाधा ४५ व ३२ येतात. ह्या किंमती कर्णाच्या सारणीमध्यें ठेवून

$$\text{द्वितीयकर्ण} = \sqrt{(६० + २४)^2 + (४५ - ३२)^2}$$

$\therefore$ द्वितीय कर्ण = ८५ हें उत्तर

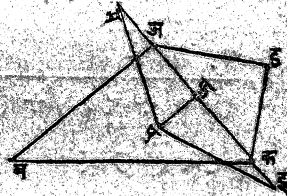
श्लोक—कर्णाश्रितस्वल्पभुजैक्यमुर्वी प्रकल्प्य तच्छेषभुजौ च बाहू ॥ साध्योऽवलंबोथ तथाऽन्यकर्णः स्वोर्व्याः कथंचिच्छ्रवणो न दीर्घः ॥ तदन्यलंबान्न लघुस्तथेदं ज्ञात्वेष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः ॥ त्र्यस्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये तयोः फलैक्यं फलमत्र नूनम् ॥

अर्थ—विषमभुज चतुरस्रांत जो इष्टकर्ण कल्पावयाचा आहे तदाश्रित जे दोन लघुभुज यांच्या बेरजेस कल्पित त्रिकोणाची भूमी धरून व दुसऱ्या दोन बाजू हे भुज धरून कल्पित त्रिकोणाचा लंब काढून त्यावरून दुसरा कर्ण तयार करावा. नंतर जो इष्टकर्ण कल्पावयाचा तो कल्पित त्रिकोणाच्या भूमीपेक्षां कमी असावा आणि कल्पित त्रिकोणाच्या लंबावरून जो दुसरा कर्ण येईल त्यापेक्षां अधिक असावा.

चतुरस्रामध्यें कर्णाच्या योगानें जे दोन त्रिकोण होतात त्यांचें पृथक् क्षेत्रफळ काढून बेरीज केली असतां चतुरस्राचें क्षेत्रफळ येतें.

प्रकृत उदाहरणामध्यें कर्णानें केलेलीं जीं दोन त्र्यस्रें त्यांचीं क्षेत्रफळें ९२४ व २३१० येतात म्हणून चतुरस्र क्षेत्रफळ = ३२३४ हें उत्तर.

उपपत्ति.



अ ब क ड या चतुरस्राचा अ क कर्णाश्रित लघु भुज अ ड आणि ड क हे आंत दाबतां दाबतां त्यांची सरळ रेषा म ई ही झाली आणि ब अ आणि ब क ह्या प म, प ई ह्या स्थितीस पोंचल्या. म्हणून स्पष्ट दिसून येईल कीं, अ क ह्या कर्णाची इष्ट किंमत म ई पेक्षां म्हणजे कल्पित त्रिकोणाच्या भूमीपेक्षां

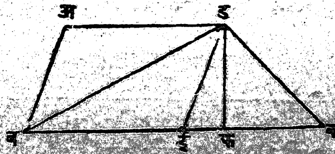
मोठी असतां कामा नये व अन्य कर्ण प फ या पेक्षां लहान असतां कामा नये म्हणून इष्ट श्लोकाची सिद्धी झाली

श्लोक—समानलंबस्य चतुर्भुजस्य मुखोनभूमिं परिकल्प्य भूमिम् ॥ भुजौभुजौ त्र्यस्त्रवदेव साध्ये तस्याऽऽबधे लंबमितिस्ततश्च ॥ आबाधयोनाचतुरस्त्रभूमिस्तल्लंबवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात् ॥ समानलंबे लघुदोः कुयोगान्मुखान्यदोः संयुतिरल्पिका स्यात् ॥

अर्थ—समांतरद्विभुजचौकोनांतील कर्ण काढण्याची रीति.

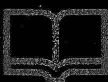
समांतर द्विभुज चौकोनामध्यें मुखापेक्षां भूमि मोठी असते. म्हणून भूमींतून मुख वजा करून जें शेष राहील ती भूमि व चतुरस्त्राच्या ज्या दुसऱ्या दोन बाजू ह्यांस भुज धरून जें त्र्यस्त्र होईल त्याची आबाधा व लंब हे आणावेत. नंतर भूमींतून आबाधा वजा करून बाकीच्या वर्गांत लंबाचा वर्ग मिळवून वर्गमूळ काढिलें असतां कर्णाची किंमत येतें. अशा प्रकारच्या चतुरस्त्रामध्यें लघुभुज व भूमि यांची बेरीज ही, अन्यभुज व मुख यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी असते.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब क ड ह्या समांतर द्विभुज चौकोनाचा ब ड हा कर्ण काढावयाचा आहे. अ ब रेषेशीं समांतर ड ई रेषा काढलेली आहे

येथें अ ड = मुख



ब क = भूमि

ड फ = लंब

फ ल = आबाधा

ब ड = कर्ण

ई क = भूमि′

अशीं नांवें देऊन

$\text{भूमि} - \text{मुख} = \text{भूमि}'$

$(\text{भूमि} - \text{आबाधा})^2 + \text{लंब}^2 = \text{कर्ण}^2$

$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{(\text{भूमि} - \text{आबाधा})^2 + \text{लंब}^2}$

आतां $\text{डई} + \text{ईक} > \text{डक}$

$\therefore \text{डई} + \text{ईक} + \text{मुख} > \text{डक} + \text{मुख}$

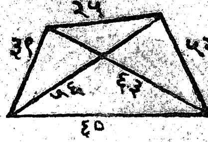
$\therefore \text{डई} + \text{भूमि}' > \text{डक} + \text{मुख}$

म्हणून इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

उदाहरणम्——द्विपंचाशन्मितत्र्येकचत्वारिंशन्मितौ भुजौ ॥ मुखं तुपञ्चविंशत्या तुल्यं षष्ट्या मही किल ॥ अतुल्यलंबकक्षेत्रमिदं पूर्वैरुदाहृतम् ॥ षट्पंचाशत्रिषष्टिश्च-नियते कर्णयोर्मिती ॥ कर्णौतत्रापरौ ब्रूहि समलंबं च तच्छ्रुती ॥

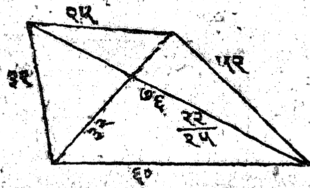
अर्थ—एका विषमभुज चौकोनाचे भुज ५२ व ३९ आहेत. मुख २५ व भूमि ६० आहे आणि दोन्ही कर्ण ५६ व ६३ आहेत. तर याच चारी बाजूंचीं प्रमाणें घेऊन अन्य कर्ण काढून दुसरा विषमभूज चौकोन बनवून दाखीव ? याच चारी बाजू समांतर द्विभुज चौकोनाच्या मानून लंब व कर्ण प्रमाण काय आहे हें सांग ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.



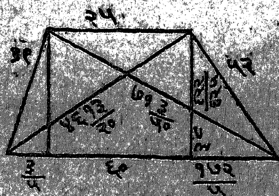
हें दिलेलें क्षेत्र आहे यांत ५६ कर्णाचे जागीं ३२ इष्टकर्ण धरिला असतां त्यावरून मागील पद्धतीनें दुसऱ्या कर्णाची किंमत ७६ $\frac{२२}{२५}$ येते. हें उत्तर.

क्षेत्रदर्शन.



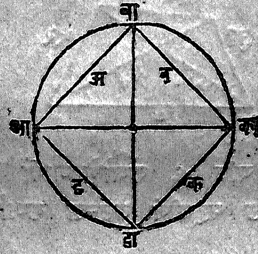
आतां हेंच क्षेत्र समांतर द्विभुज चतुरस्र असतां प्रस्तुत श्लोकाच्या रीतीनें लंब ३८ $\frac{१}{६}$ $\frac{२}{२}$ $\frac{२}{५}$ आबाधा $\frac{३}{५}$ व $\frac{१७२}{५}$ व कर्ण ७१ $\frac{३}{८०}$ | ४६ $\frac{१३}{२०}$ येतात. हें उत्तर.

क्षेत्रदर्शन



श्लोक—कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथान्योन्यभाजितं गुणयेत् ॥ योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥

अर्थ---आकृती काढून समीकरण स्वरूपानें देतों.



$$\text{आ का (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अ . क} + \text{बड})(\text{अड} + \text{बक})}{\text{अब} + \text{कड}}}$$

$$\text{बा डा (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अक} + \text{बड})(\text{अ . ब} + \text{कड})}{\text{अड} + \text{बक}}}$$

ही रीति ब्रह्मगुप्तादिकांनीं कोणत्याही विषमचतुरस्रास लाविली. हें बरोबर नाहीं. प्रस्तुत रीति वृत्तांतर्गत चतुरस्राचे कर्ण काढण्यासच उपयोगीं पडतें असें समजावें कारण अन्यचतुरस्राचे कर्ण अनियत असतात.

उपपत्ति.

मागें सर्वदोर्युतिदलमित्यादि श्लोकाची उपपत्ति दिली आहे त्यांतील समीकरण (३) यांतील कोभु . बा ह्याची किंमत समीकरण (२) मध्यें ठेविली असतां

$$\text{आ का}^{२} = \text{क}^{२} + \text{ड}^{२} + \frac{\text{२ कड} (\text{अ}^{२} + \text{ब}^{२} - \text{क}^{२} - \text{ड}^{२})}{\text{२} (\text{अब} + \text{कड})}$$

$$\therefore \text{आ का}^{२} = \frac{(\text{अक} + \text{बड}) (\text{अड} + \text{बक})}{\text{अब} + \text{कड}}$$

$$\therefore \text{आका (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अक} + \text{बड})(\text{अड} + \text{बक})}{\text{अब} + \text{कड}}}$$

याच पद्धतीनें क्रिया केली असतां

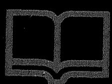
$$\text{बा डा (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अक} + \text{बड})(\text{अब} + \text{कड})}{\text{अड} + \text{बक}}}$$

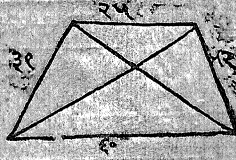
म्हणून इष्टसूत्रसिद्धी झाली.

श्लोक—अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोट्य: परस्परं कर्णहता भुजा इति ॥ चतुर्भुजं यद्विषमं प्रकल्पितं श्रुती तु तत्र त्रिभुजद्वयात्तत: ॥ बाव्होर्वध: कोटिवधेन युक्स्यादेका श्रुति: कोटिभुजावधैक्यम् ॥ अन्या लघौ सत्यपि साधनेऽस्मिन्पूर्वै: कृतं यद्गुरु तन्न विद्म: ॥

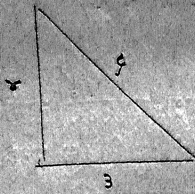
अर्थ—दोन काटकोन त्रिकोण असे कल्पावेत कीं, त्यांतील एकाच्या भुजकोटींस दुसऱ्याच्या कर्णानें गुणिलें आणि दुसऱ्याच्या भुजकोटींस पहिल्याच्या कर्णानें गुणिलें तर दिलेल्या वृत्तस्थ विषम चतुरस्राच्या चारी बाजू होतील. त्या दोन काटकोन त्रिकोणांतील भुजांच्या गुणाकारांत कोटींचा गुणाकार मिळविला असतां दिलेल्या विषम चतुरस्रांतील कर्णाची किंमत येते. आणि त्या दोन काटकोन त्रिकोणांतील एकाचा भुज व दुसऱ्याची कोटि यांच्या गुणाकारांत दुसऱ्याचा भुज व पहिल्याची कोटि यांचा गुणाकार मिळविला असतां चतुरस्रांतील दुसऱ्या कर्णाची किंमत येतें. असें कर्ण आणण्याचें सोपें साधन असतां पूर्वाचार्यांनीं कर्ण साधनाविषयीं महाप्रयत्न केला त्याचें कारण काय असेल तें असो.

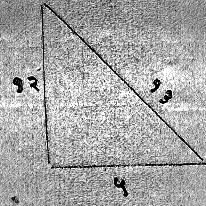
आतां ही रीति स्पष्ट समजण्याकरितां कल्पित उदाहरण देऊं.





हें दिलेलें चतुरस्र आहे यांतील कर्णांच्या किंमती काढा ?





हें दोन काटकोन त्रिकोण कल्पिले.

यांत ४ × १३ = ५२

३ × १३ = ३९

१२ × ५ = ६०

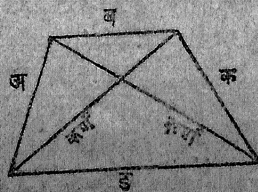
५ × ५ = २५

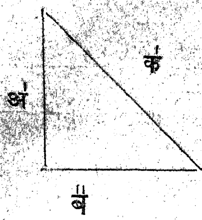
या प्रमाणें चतुरस्राच्या बाजू आहेत

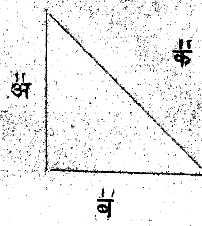
∴ ४ × १२ + ३ × ५ = ६३ कर्ण हें उत्तर

३ × १२ + ४ × ५ = ५६ कर्ण हें उत्तर

उपपत्ति.







येथें $\text{अ}' \times \text{क}' = \text{क}$

$\text{ब}' \times \text{क}' = \text{अ}$

$\text{अ}'' \times \text{क}' = \text{ड}$

$\text{ब}'' \times \text{क}' = \text{ब}$

या प्रमाणें दिलेलें आहे,

वरील दोन त्रिकोण काटकोन आहेत

$\therefore \text{अ}'^{2} + \text{ब}'^{2} = \text{क}'^{2}$ .... (१)

$\text{अ}''^{2} + \text{ब}''^{2} = \text{क}''^{2}$ .... (२)

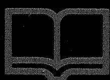
आतां मागें कर्णाश्रित भुजघातैक्य मित्यादि श्लोकाची उपपत्ति दिली आहे त्यांतील अखेरचें समीकरण घेऊन

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\frac{(\text{अ}.\text{क}+\text{ब}.\text{ड})(\text{अ}\text{ड}+\text{ब}\text{क})}{\text{अ}\text{ब}+\text{क}\text{ड}}}$$

यांत आरंभीं दिलेल्या किमती ठेऊन

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\frac{(\text{अ}'.\text{क}''.\text{ब}'\text{क}''+\text{अ}''.\text{क}'\text{ब}''\text{क}')(\text{ब}'\text{क}''\text{अ}''\text{क}'+\text{अ}'\text{क}''\text{ब}''\text{क}')}{\text{ब}'\text{क}''\text{ब}''\text{क}'+\text{अ}'\text{क}''\text{अ}''\text{क}'}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{अ}'\text{ब}'^{2}\text{क}''^{2}\text{अ}''\text{क}'+\text{अ}''^{2}\text{क}'^{3}\text{ब}''\text{ब}''\text{क}''+\text{अ}'^{2}\text{क}'^{3}\text{ब}'\text{क}''\text{ब}''+\text{अ}''\text{ब}''^{2}\text{क}'^{3}\text{क}''\text{अ}''}{\text{ब}'\text{क}''\text{ब}''\text{क}'+\text{अ}'\text{क}''\text{अ}''\text{क}'}}$$



येथें अंशच्छेदांस क' . क'' ह्यानें भागून

$$\text{कर्ण}=\sqrt{\frac{\text{अ}'\text{व}''^{2}\text{क}'^{2}\text{अ}''+\text{अ}''^{2}\text{क}'^{2}\text{व}'\text{व}''+\text{अ}'^{2}\text{क}''^{2}\text{व}'\text{व}''+\text{अ}'\text{व}''^{2}\text{क}''^{2}\text{अ}''}{\text{व}'\text{व}''+\text{अ}'\text{अ}''}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{अ}'\text{अ}''(\text{व}''^{2}\text{क}'^{2}+\text{व}'^{2}\text{क}''^{2})+\text{व}'\text{व}''(\text{अ}''^{2}\text{क}'^{2}+\text{अ}'^{2}\text{क}''^{2})}{\text{व}'\text{व}''+\text{अ}'\text{अ}''}}$$

येथें $\text{क}'^{2}$ आणि $\text{क}''^{2}$ ह्यांच्या किंमती

समीकरण (१) व (२) यावरून घेऊन

$$\text{कर्ण}=\sqrt{\frac{२\text{अ}'\text{अ}''\text{व}'\text{व}''(\text{व}'\text{व}''+\text{अ}'\text{अ}'')+\text{व}'^{2}\text{अ}''^{2}(\text{अ}'\text{अ}''+\text{व}'\text{व}''+\text{अ}'^{2}\text{व}''^{2}(\text{अ}'\text{अ}''+\text{व}'\text{व}'')}{\text{अ}'\text{अ}''+\text{व}'\text{व}''}}$$

$$\therefore \text{कर्ण}=\sqrt{२\,\text{अ}'\text{अ}''\text{व}'\text{व}''+\text{व}'^{2}\text{अ}''^{2}+\text{अ}'^{2}\text{व}''^{2}}$$

$$\therefore \text{कर्ण}=\sqrt{(\text{व}'\text{अ}''+\text{अ}'\text{व}'')^{२}}$$

$$\therefore \text{कर्ण}=\text{व}'\text{अ}''+\text{अ}'\text{व}''$$

याच प्रमाणें दुसरा कर्ण आणण्याकरितां क्रिया केली असतां

$$\text{कर्ण}=\text{अ}'.\text{अ}''+\text{व}'\text{व}''$$

म्हणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक—क्षेत्रे यत्र शतत्रयं क्षितिमितिस्तत्रेंद्रुतुल्यं मुखं बाहू खोत्कृतिभिः शरातिधृतिभि स्तुल्यौ च तत्र श्रुती ॥ एका खाष्टयमैः समा तिथिगुणैरन्याऽथ तल्लंबकौ ॥ तुल्यौ गोधृतिभिस्तथा जिनयमै र्योगाच्छ्रवो लंबयोः ॥ तत्खंडे कथयाधरे श्रवणयोर्योगाच्च लंबावधास्तत्सूची निजमार्ग- वृद्धभुजयोर्योगेन या स्यात्ततः ॥ साबाधं बत लंबकं च भुजयोः सूच्याः प्रमाणे च के सर्वं गाणितिक प्रचक्ष्व नितरां क्षेत्रेऽत्र दक्षोऽसि चेत् ॥

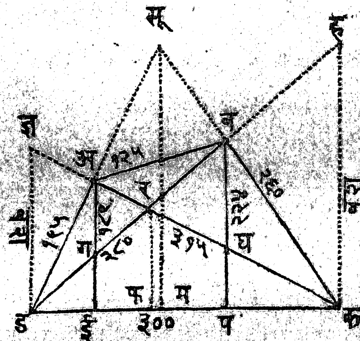
अर्थ—एका विषमभुज चतुरस्रांतील भूमि ३०० मुख १२५ सव्यभुज १९५ दक्षिणभुज २६० लघुकर्ण २८० दुसरा कर्ण ३१५ लघु लंब १८९ दुसरा लंब २२४ अशीं मानें आहेत तर कर्ण व लंब यांच्या छेदनानें खालच्या बाजूस जें कर्ण खंड व लंब खंड होईल त्यांचीं मानें सांग? दोन कर्णांच्या छेदन बिंदूपासून भूमीवर लंब काढिला असतां भूमीचीं जीं दोन खंडें (आबाधा) होतील त्यांचीं मानें लंबाचें मान सांग? चतुरस्राचे दोन्ही भुज वाढवून ज्या ठिकाणीं मिळतील त्या बिंदूस सूची म्हणतात त्या सूचीपासून भूमीवर काढलेला लंब तत्संबंधी आबाधा व वाढवून झालेले भुज यांचीं मानें काय आहेत तीं सांग?

हें उदाहरण सोडविण्यास पुढील सहा श्लोकांची अपेक्षा आहे करितां त्या श्लोकांचा अर्थ व उपपत्ति देतांना हें उदाहरण सोडवून दाखवूं—

श्लोक—लंबतदाश्रितबाह्वोर्मध्यं संध्याख्यमस्य लंबस्य ॥ संध्यूना भूः पीठं साध्यं यस्याधरं खंडम् ॥ तत्संधिर्द्विष्ठः परलंबश्रवणाहतोऽन्यपीठेन ॥ भक्तोलंबश्रुत्योर्योगात्स्यातामधःखंडे ॥

अर्थ—लंब व लंबाश्रितभुज यांच्या मध्यास "लंबाचा संधि" असें म्हणतात. व भूमीमध्यें संधि वजा करून जें शेष राहतें त्यास "पीठ" असें म्हणतात. ज्या लंब संबंधाचीं अधःखंडें साधावयाचीं आहेत त्या लंबाचा संधि दोन ठिकाणीं मांडून त्यास परलंब व कर्ण यांनीं गुणावें व अन्यपीठानें भागिलें असतां क्रमानें लंबखंड व कर्णखंड हीं येतात.

उपपत्ति.



$$\frac{\text{ड ई}}{\text{ग ई}} = \frac{\text{ड प}}{\text{प ब}}$$

$$\therefore \text{ग ई} = \frac{\text{ड ई} \times \text{प ब}}{\text{ड प}}$$

$$\therefore \text{लंबखंड} = \frac{\text{संधि} \times \text{परलंब}}{\text{पीठ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\frac{\text{ग ड}}{\text{ड ई}} = \frac{\text{ब ड}}{\text{ड प}}$$

$$\therefore \text{ग ड} = \frac{\text{ड ई} \times \text{ब ड}}{\text{ड प}}$$

$$\therefore \text{कर्णखंड} = \frac{\text{संधि} \times \text{कर्ण}}{\text{पीठ}} \quad \ldots\ldots\ldots (२)$$

$$\frac{\text{क प}}{\text{प घ}} = \frac{\text{क ई}}{\text{ई अ}}$$

$$\therefore \text{प ष} = \frac{\text{क प} \times \text{ई अ}}{\text{क ई}}$$

$$\therefore \text{द्वितीयलंबखंड} = \frac{\text{अन्यसंधि} \times \text{अन्यलंब}}{\text{अन्य पीठ}} \ldots\ldots(३)$$

$$\frac{\text{घ क}}{\text{क प}} = \frac{\text{अ क}}{\text{ई क}}$$

$$\therefore \text{घ क} = \frac{\text{क प} \times \text{अ क}}{\text{ई क}}$$

$$\therefore \text{द्वितीयकर्णखंड} = \frac{\text{अन्यसंधि} \times \text{अन्यकर्ण}}{\text{अन्य पीठ}} \ldots\ldots(४)$$

म्हणून समीकरण (१), (२), (३), व (४)

यापासून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

वरील समीकरणामध्यें दिलेल्या किंमती ठेवून

लंब खंड = ६४
कर्ण खंड = ८०
अन्य लंब खंड = ९९ } हें उत्तर.
अन्य कर्ण खंड = १६५

श्लोक—लंबौ भूघ्नौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ स्तः ॥ ताभ्यां प्राग्वच्छ्रुत्योर्योगाल्लंबः कुखंडे च ॥

अर्थ—लंबास भूमीनें गुणून आपापल्या पीठानें भागिलें असतां वंशाच्या किंमती येतात. नंतर त्या वंशापासून "अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगाद्वेण्वोर्वधे योगहृते च लंबः" या मार्गें गेलेल्या श्लोकपद्धतीनें लंब आणावा व त्यापासून आबाधाही काढाव्या.

उपपत्ति.

$$\frac{\text{ह प}}{\text{प ब}} = \frac{\text{ड क}}{\text{क ह}}$$

$$\therefore \text{क ह} = \frac{\text{प ब} \times \text{ड क}}{\text{ह प}}$$

$$\therefore \text{वंश} = \frac{\text{लंब} \times \text{भूमि}}{\text{पीठ}} \text{ .... } (१)$$

$$\frac{\text{क ई}}{\text{अ ई}} = \frac{\text{क ड}}{\text{ड ज्ञ}}$$

$$\therefore \text{ड ज्ञ} = \frac{\text{अ ई} \times \text{क ड}}{\text{क ई}}$$

$$\therefore \text{अन्य वंश} = \frac{\text{अन्य लंब} \times \text{भूमि}}{\text{अन्य पीठ}} \text{ .... } (२)$$

∴ म्हणून इष्ट श्लोकसिद्धि झाली.

वरील दोन्ही समीकरणामध्यें दिलेल्या किंमती ठेवून वंश २२५।४०० यापासून लंब १४४ व भूमिखंडें १०८ १९२ हें उत्तर.

श्लोक—लंबहृतो निजसंधिः परलंबगुणः समाव्हयो ज्ञेयः ॥ समपरसंध्योरैक्यं हारस्तेनोद्धृतौ तौ च ॥ समपरसंधी भूघ्नौ सूच्याबाधे पृथक्स्याताम् ॥ हारहृतः परलंबः सूचीलंबो भवेद्भूघ्नः ॥ सूचीलंबघ्नभुजौ निजनिजलंबोद्धृतौ भुजौ सूच्याः ॥ एवं क्षेत्रक्षोदः प्राज्ञैस्त्रैराशिकात्क्रियते ॥

अर्थ—लंबानें आपल्या संधीस भागून परलंबानें गुणावें त्या गुणाकारास "सम" अशी संज्ञा आहे. आणि समसंज्ञक-

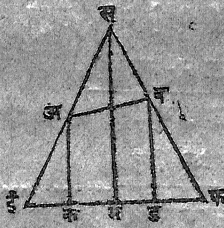
मध्यें पर संधि मिळवून जी बेरीज होईल तिला "हार" ही संज्ञा द्यावी. नंतर समसंज्ञक व परसंधि यांला पृथक् भूमीनें गुणून हारानें भागिलें असतां सूचिलंबाच्या संबंधाच्या दोन्ही आबाधा येतात.

परलंबास हारानें भागून भूमीनें गुणिलें असतां सूचीलंबाची किंमत येतें.

सूचीलंबानें चतुरस्राच्या दोन्हीं भुजांस पृथक् गुणून आपापल्या लंबानें भागिलें असतां सूचीपर्यंत वाढविलेल्या भुजांची किंमत येतें.

ह्या सूचिक्षेत्र संबंधाच्या सर्व रीती फक्त त्रैराशिकावरून निघतात.

उपपत्ति.



येथें समसूची लंब = न

अक = ल

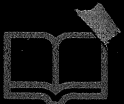
बड = ळ

ईक = श

डफ = स

ईम = क्ष

मफ = य



ईफ = भू

अई = भु

बफ = बु

याप्रमाणें संज्ञा ठेवून

$$\frac{श}{ल} = \frac{क्ष}{न} \quad \ldots\ldots (१)$$

$$\frac{स}{ळ} = \frac{य}{न} \quad \ldots\ldots (२)$$

ह्या दोन समीकरणांच्या बेरजेवरून

$$\frac{शळ + सल}{ल . ळ} = \frac{क्ष + य}{न} = \frac{भू}{न}$$

$$\therefore न = \frac{ल . ळ . भू.}{शळ + सल} \quad \ldots\ldots (३)$$

ही किंमत समीकरण (१) मध्यें ठेवून

$$\frac{श}{ल} = \frac{क्ष. \ (शळ + सल)}{ल . ळ . भू.}$$

$$\therefore क्ष = \frac{श . ळ . भू . ल}{ल (शळ + सल)} \quad \ldots\ldots (४)$$

आतां समीकरण (२) मध्यें (३) मधील किंमत ठेऊन

$$\frac{स}{ळ} = \frac{य (शळ + सल)}{ल . ळ . भू}$$

$$\therefore य = \frac{स . ल . भू \ ळ}{ळ (शळ + सल)} \quad \ldots\ldots (५)$$

$$\frac{शळ}{ल} = समसंज्ञा$$

सम + स = हारसंज्ञा देऊन समीकरण (४) वरून

$$क्ष = \frac{सम \times भू}{हार} = आबाधा$$

याच पद्धतीनें

$$य = \frac{स \times भू}{हार} = आबाधा$$

समीकरण (३) मध्यें हारसंज्ञा देऊन

$$न = \frac{ळ \times ल}{हार}$$

$$\therefore सूचीलंब = \frac{लंब \times भूमि}{हार}$$

$$\frac{ळ}{बु} = \frac{न}{सफ}$$

$$\therefore सफ = बृहत्भुज = \frac{बु \cdot न}{ळ}$$

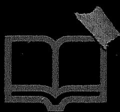
$$\frac{ल}{भु} = \frac{न}{सई}$$

$$\therefore सई = अन्यबृहत्भुज = \frac{भु \cdot न}{ल}.$$

म्हणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

वरील समीकरणामध्यें प्रकृत उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून

$$आबाधा \; \frac{२९६४}{१७} \Big| \frac{१९३६}{१७} \; सू. \; \frac{६०४८}{१७}$$



आणि सूक्ष्म $\frac{६२४०}{१७}$ | $\frac{७०२०}{१७}$ हें उत्तर

सूत्र—व्यासे भनंदाग्निहते विभक्ते खबाणसूर्यैः परिधिस्तु सूक्ष्मः ॥ द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथ शैलैः स्थूलोऽथवा स्याद्व्यवहारयोग्यः ॥

अर्थ—व्यासास ३९२७ नीं गुणून १२५० नीं भागिलें असतां सूक्ष्म परिधि येतो. आणि व्यासास २२ नीं गुणून ७ नीं भागिलें असतां व्यवहारास योग्य असा स्थूल परिधि येतो.

उदाहरणम्—विष्कंभमानं किल सप्त यत्र तत्र प्रमाणं परिधेः प्रचक्ष्व ॥ द्वाविंशतिर्यत्परिधिप्रमाणं तद्व्याससंख्यां च सखे विचिन्त्य ॥

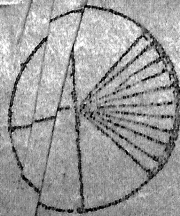
अर्थ—ज्या वृत्ताचा व्यास ७ आहे त्याचा परिधि काय? व ज्या वृत्ताचा परिधि २२ आहे त्याचा व्यास काय हें सांग?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

$$परिधि = \frac{७ \times ३९२७}{१२५०} = २१\frac{५१}{५०}$$ हें उत्तर.

$$व्यास = \frac{२२ \times १२५०}{३९२७} = ७\frac{११}{३९२७}$$ हें उत्तर.

उपपत्ति.



जर आपण त्रिज्या धरून एकेक कलांच्या भुजज्या घेऊ

त्या सर्वांची बेरीज केली असतां वर्तुळाचा परिधि येईल. कारण वर दिलेल्या आकृतीवरून सहज लक्षांत येईल. कीं एक कलेची भुजज्या व एक कलेचें चाप (कंस) समान आहे. म्हणून एक कलेची भुजज्या घेऊन वृत्तांतील २१६०० कलांनीं गुणून परिधि काढूं.

भुजज्या १ कला = .०००२९०९

यांस २१६०० नीं गुणून ६.२८३४४०० हा परिधि १ त्रिज्या असतां झाला. तेव्हां परिधीचें व्यासाशीं प्रमाण काढण्याकरितां आलेल्या परिधीस २ नें भागून ३.१४१७२००

∴ $३\frac{१४१७}{१००००}=\frac{३१४१७}{१००००}$ अंशाच्छेदांस सुमारें ८ नें संक्षेप देऊन $\frac{३९२७}{१२५०}$ हें व्यास परिधिप्रमाण झालें म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

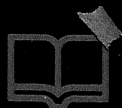
सूत्रम्—वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं यत् क्षुण्णं वेदैरुपरि परितः कंदुकस्येव जालम् ॥ गोलस्यैवं तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिघ्नं षड्भिर्भक्तं भवति नियतं गोलगर्भे घनाख्यम् ॥

अर्थ—परिधीनें व्यासास गुणून त्याचा चतुर्थांस केला असतां वर्तुळाचें क्षेत्रफळ येतें.

गोल व्यासाचे शेवटांतून जाणाऱ्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळास ४ नीं गुणिलें असतां गोलाचें पृष्ठफळ होतें.

गोलाचे पृष्ठफळास व्यासानें गुणून ६ नीं भागिलें असतां गोलाचें घनफळ येतें.

उदाहरणम्—यद्व्यास स्तुरगैर्मितः किल फलं क्षेत्रे समे तत्र किं व्यासः सप्तमितश्च यस्य सुमते गोलस्य तस्यापि किम् ॥ पृष्ठे कंदुकजालसंनिभफलं तस्यैव गोलस्य किं मध्ये ब्रूहि घनं फलं च विमलां चेद्वेत्सि लीलावतीम्॥



अर्थ— ज्या वर्तुळाचा व्यास ७ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय ? ज्या गोलाचा व्यास ७ त्याचें पृष्ठफल काय ? व ज्या गोलाचा व्यास ७ आहे त्याचें घनफळ काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{परिधि} = \frac{७ \times ३९२७}{१२५०} = \frac{२७४८९}{१२५०}$$

$$\text{वृत्त क्षेत्रफल} = \frac{७}{४} \times \frac{२७४८९}{१२५०} = \frac{१९२४२३}{५०००}$$

$$\therefore \text{ वृ. क्षे. फ.} = ३८ \frac{२४२३}{५०००} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{गोल पृष्ठफल} = \frac{१९२४२३}{५०००} \times ४ = \frac{१९२४२३}{१२५०}$$

$$\text{गो. पृ. फ.} = १५३ \frac{११७३}{१२५०} \text{ हें उत्तर.}$$

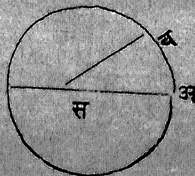
$$\text{गोल घनफल} = \frac{१९२४२३}{१२५०} \times ७ \div ६$$

$$\text{गो. घ. फ.} = \frac{४४८९८७}{२५००}$$

$$\text{गो. घ. फ.} = १७९ \frac{१४८७}{२५००} \text{ हें उत्तर.}$$

हीं उत्तरें सूक्ष्म आहेत. जर परीधि व व्यास यांचें प्रमाण $\frac{२२}{७}$ घेऊन काढिली तर तीं स्थूल येतील.

उपपत्ति.



एक कलेची भुजज्या व एक कलेचें चाप सुमारें समान असतें

ह्मणून स ह्या वृत्त मध्यार्शी एक कलाकोन होणारे अ स ब ह्या त्रिकोणासारखें २१६०० त्रिकोण करून त्या सर्व त्रिकोणांची क्षेत्रफळें काढून त्यांची बेरीज केली असतां सर्व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ येईल.

$$\therefore \frac{\text{लंब} \times \text{त्रिज्या}}{२} + \frac{\text{लं} \times \text{त्रि}}{२} + \frac{\text{लं} \times \text{त्रि}}{२} + \ldots\ldots$$

$$\text{इत्यादि २१६०० पदें} = \frac{\text{त्रि}}{२}(\text{लं} + \text{लं} + \text{लं} + \text{लं} \ldots)$$

$$= \frac{\text{त्रि} \times \text{वृत्तपरिधि}}{२} = \frac{\text{व्यास} \times \text{परिधि}}{२ \times २}$$

$$= \frac{\text{व्यास} \times \text{परिधि}}{४}$$ हें वृत्तक्षेत्रफळ झालें.

म्हणून वृत्तक्षेत्रफळरीतीची उपपत्ति झाली.

सिद्धांत १ ज्या पंचपात्राची उंची व व्यास गोलाच्या व्यासाबरोबर आहे अशा पंचपात्रामध्यें तो गोल ठेविला असतां पंचपात्राच्या घनफळाच्या $\frac{२}{३}$ बरोबर गोलाचें घनफळ येतें. हा सिद्धांत प्रत्यक्ष अनुभवानें ठरतो तो असा—पंचपात्रामध्यें मृत्तिकेचा गोल ठेवून त्या पंचपात्राचे तीन भाग करून खुणा कराव्या नंतर तो गोळा फोडून सारखा पंचपात्रामध्यें बसविला तर पंचपात्राचा एक भाग वरती रिकामा राहतो असें प्रत्यक्ष करून पाहिलें असतां वरील सिद्धांत ठरतो.

सिद्धांत २—पंचपात्राच्या वक्र पृष्ठफळाबरोबर गोलाचें पृष्ठफळ येतें.

ह्या सिद्धांत, पंचपात्राच्या पृष्ठफळाबरोबरचें एक फडकें

घेऊन तें गोलावर बसविलें असतां ते गोलास पुरतें या प्रत्यक्ष कृतीवरून ठरतो.

२⁄₇ या परिघिन्यास प्रमाणास "गु" हें नांव देऊन

पंचपात्राच्या वक्रपृष्ठाची लांबी = २ त्रि. गु आणि २ त्रि = पंचपात्राच्या वक्रपृष्ठाची रुंदी.

पंचपात्र उभें चिरलें असतां समांतर भुज चौकोन होतो. तेव्हां त्याच्या लांबी रुंदीचा गुणाकार केला ह्मणजे पंचपात्राचें वक्रपृष्ठाचें क्षेत्रफल होईल.

∴ पंचपात्र पृष्ठफल = २ त्रि. गु. × २ त्रि

$$= ४\ त्रि^{२}.\ गु.$$

$$= \frac{परिधि \times व्यास}{४} \times ४$$

ह्मणून सिद्धांत २ वरून

गोलपृष्ठफल = ४ × वृत्तक्षेत्रफल.

ह्मणून पृष्ठफलरीतीची सिद्धि झाली.

पंचपात्राच्या वृत्तक्षेत्रफलास उंचीनें ह्मणजे गोलव्यासानें गुणिलें असतां पंचपात्राचें घनफल होईल.

∴ पंचपात्राचें घनफल = त्रि². गु × व्यास

म्हणून सिद्धांत १ वरून

$$गोल\ घनफल = \frac{त्रि^{२}\ गु \times व्या \times २}{३}$$

$$= \frac{त्रि.^{२}\ गु \times व्या \times २ \times २}{३ \times २}$$

$$= \frac{\text{त्रि.}^2 \text{ गु} \times \text{व्या } ४}{६}$$

$$= \frac{\text{गोल पृष्ठफल} \times \text{व्या}}{६}$$

म्हणून संपूर्ण इष्ट सूत्रसिद्धी झाली.

सूत्रम्–व्यासस्य वर्गे भनवाग्निनिघ्ने सूक्ष्मं फलं पंचसहस्रभक्ते ॥ रुद्राहते शक्रहृतेऽथवा स्यात्स्थूलं फलं संव्यवहारयोग्यम् ॥ घनीकृतव्यासदलं निजैकविंशांशयुग्गोलफलं घनं स्यात् ॥

अर्थ—वर्तुळाच्या व्यासाच्या वर्गास ३९२७ नीं गुणून ५००० नीं भागिले असतां वर्तुळाचें क्षेत्रफल सूक्ष्म येतें.

वर्तुळाच्या व्यासाच्या वर्गास ११ नीं गुणून १४ नीं भागिलें असतां वर्तुळाचें क्षेत्रफल स्थूल येतें.

व्यासाच्या घनाचे अर्धास, व्यासाचे घनाच्या अर्धास २१ नीं भागून जो भागाकार येईल तो मिळविला असतां गोळाचें घनफळ होईल.

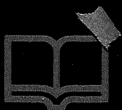
उपपत्ति.

$$\text{वृत्तक्षेत्रफल} = \frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{४}$$

यांत परिधि = २ त्रि. गु = २ त्रि × ३.१४१६ ही किंमत ठेऊन.

$$\text{वृत्तक्षेत्रफल} = \frac{\text{व्यास} \times ३.१४१६ \times \text{व्यास}}{४}$$

$$\text{वृ.क्षे.फ} = \frac{\text{व्यास}^2 \times ३.१४१६}{४}$$



$\therefore$ वृ.क्षे.फ. = व्या^{2} × .७८५४

$$= \text{व्या}^{2} \cdot \frac{७८५४}{१००००}$$

$$= \text{व्या}^{2} \times \frac{३९२७}{५०००} \text{............} (१)$$

अथवा अंशच्छेदांस ३५७ नें भागून

स्थूल वृत्तक्षेत्रफल $= \text{व्या}^{2} \times \frac{११}{१४}$ .... (२)

आतां मागील सूत्राच्या उपपत्तींतील

$$\text{गोलघनफल} = \frac{२\ \text{त्रि}^{2} .\ \text{गु} \times \text{व्या}}{३}$$

$$= \frac{२\ \text{व्या}^{2} .\ \text{गु} .\ \text{व्या}}{४ \times ३}$$

$$= \frac{२\ \text{व्या}^{3} .\ २२}{४ \times ३ \times ७}$$

$$= \frac{११\ \text{व्या}^{3}}{२१} \times \frac{२}{२}$$

$$= \frac{२२\ \text{व्या}^{3}}{४२}$$

$$= \frac{२१\ \text{व्या}^{3}}{४२} + \frac{\text{व्या}^{3}}{२ \times २१}$$

$$= \frac{\text{व्या}^{3}}{२} + \frac{\text{व्या}^{3}}{२ \times २१} \text{............} (३)$$

म्हणून समीकरण (१) (२) व (३) यांवरून इष्टसिद्धि झाली.

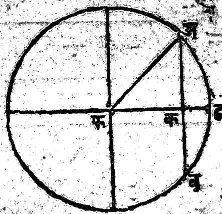
सूत्रम्—ज्याव्यासयोगांतरघातमूलं व्यासस्तदूनो द-
लितः शरः स्यात् ॥ व्यासाच्छरोनाच्छरसंगुणाच्च मूलं
द्विनिघ्नं भवतीह जीवा ॥ जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते
व्यासप्रमाणं प्रवदंति वृत्ते ॥

अर्थ—व्यासांतून ज्या वजा करून जी बाकी राहील तीं, व व्यासांत ज्या मिळवून जी बेरीज होईल ती, ह्यांचा गुणाकार करून वर्गमूळ काढावें. नंतर तें मूळ व्यासांतून वजा करून अर्ध केलें असतां शराची किंमत येते.

व्यासांतून शर वजा करून जी बाकी राहील तिला शरानें गुणून वर्गमूळ काढावें. त्या वर्गमूळाची दुप्पट केली असतां ज्या येते.

ज्येच्या अर्धाच्या वर्गास शरानें भागून शर मिळविला तर व्यास येतो.

उपपत्ति.



येथें अफ = त्रिज्या = त्रि

अब = ज्या

कड = शर = श

कफ = क्ष

याप्रमाणें संज्ञा देऊन

$$क्ष = \sqrt{त्रि^{२} - \left(\frac{ज्या}{२}\right)^{२}}$$

$$= \sqrt{\frac{४\ त्रि^{२} - ज्या^{२}}{४}}$$

उभय पक्षांचा वर्ग करून

$$क्ष^{२} = \frac{४\ त्रि^{२} - ज्या^{२}}{४}$$

$$क्ष^{२} = \frac{व्या^{२} - ज्या^{२}}{४}$$

$$४\ क्ष^{२} = व्या^{२} - ज्या^{२}$$

$$४\ क्ष^{२} = (व्या + ज्या)(व्या - ज्या)$$

$$२\ क्ष = \sqrt{(व्या + ज्या)(व्या - ज्या)}$$

यांत क्ष = त्रि − श ही किंमत ठेवून

$$२(त्रि - श) = \sqrt{(व्या + ज्या)(व्या - ज्या)}$$

$$२\ त्रि - २\ श = \sqrt{(व्या + ज्या)(व्या - ज्या)}$$

$$\therefore श = \frac{व्या - \sqrt{(व्या + ज्या)(व्या - ज्या)}}{२} \quad ....(१)$$

आतां रेखागणिताच्या तृतीयाध्यायांतील ३९ व्या सिद्धांतावरून

$$(व्या - श)\ श = \frac{ज्या}{२} \times \frac{ज्या}{२} = \left(\frac{ज्या}{२}\right)^{२}$$

$$\therefore ज्या = \sqrt{(व्या - श)\ श} \times २ \ldots\ldots\ldots\ (२)$$

$$आणि\ व्या - श = \frac{\left(\frac{ज्या}{२}\right)^{२}}{श}$$

$$\text{ज्या} = \frac{\left(\frac{\text{ज्या}}{२}\right)^{२}}{\text{श}} + \text{श} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

म्हणून समीकरण (१), (२), (३) या वरून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—दशविस्तृतिवृत्तांतर्यत्रज्या षण्मिता सखे ॥ तत्रेषुं वद बाणाज्ज्यां ज्याबाणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥

अर्थ—ज्याचा व्यास १० आहे अशा वर्तुळांतील ज्या कंसाची ६ आहे त्याचा शर काय? व शरावरून ज्या किती? व ज्या आणि बाण यांपासून वृत्ताचा व्यास किती हें सांग?

उत्तर निष्काशनक्रिया.

$$\text{शर} = \frac{१० - \sqrt{(१० + ६)(१० - ६)}}{२}$$

$$= १ \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{ज्या} = \sqrt{(१० - १)\ १} \times २ = ६ \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{व्या} = \frac{\left(\frac{६}{४}\right)^{२}}{१} + १ = १० \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—त्रिव्यंकाग्निनभश्चन्द्रैस्त्रिबाणाष्टयुगाष्टभिः ॥ वेदाग्निपंचखाश्वैश्च खखाभ्राभ्ररसैः क्रमात् ॥ बाणेषुनखबाणैश्च द्विद्विनन्देषुसागरैः ॥ कुरामदशवेदैश्च वृत्तव्यासे समाहते ॥ खखखाभ्रार्कसंभक्ते लभ्यंते क्रमशो भुजाः ॥ वृत्तांतस्त्र्यस्रपूर्वाणां नवास्रांतं पृथक् पृथक् ॥

अर्थ—वृत्त व्यासास १०३९२३, ८४८५३, ७०५३४, ६००००, ५२०५५, ४५९२२, आणि ४१०३१ या अंकांनीं क्रमानें गुणून जे गुणाकार येतील त्यांस १२०००० या संख्येनें भागिलें असतां क्रमानें वर्तुळांत काढिलेल्य समभुजत्रिकोण,

समभुजसमकोणचौकोन इत्यादि समभुजसमकोणनवकोणापर्यंत ज्या आकृती होतात त्यांच्या प्रत्येकी निरनिराळ्या बाजू होतात.

उदाहरणम्—सहस्रद्वितयव्यासं यद्वृत्तं तस्य मध्यतः ॥
समत्र्यस्रादिकानां मे भुजान्वद पृथक् पृथक् ॥

अर्थ—ज्या वृत्ताचा व्यास २००० आहे त्यांत समभुज त्रिकोण, समभुजसमकोणचौकोन, इत्यादि समभुज समकोण नवकोणापर्यंत काढिलेल्या आकृतींच्या प्रत्येकी बाजू मला सांग.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

समभुज त्रिकोणाची बाजू $= \frac{२००० \times १०३९२३}{१२००००}$

$\therefore$ समभुज त्रिकोणाची बाजू $= १७३२\frac{१}{२०}$ हें उत्तर.

चौरसाची बाजू $= \frac{२००० \times ८४८५३}{१२००००} = १४१४\frac{१३}{६०}$ हें उत्तर.

पंचकोणाची बाजू $= \frac{२००० \times ७०५३४}{१२००००} = ११७५\frac{१७}{३०}$ हें उत्तर.

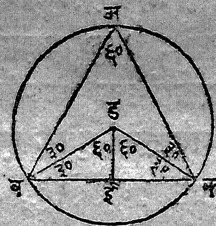
षट्कोणाची बाजू $= \frac{२००० \times ६००००}{१२००००} = १०००$ हें उत्तर.

सप्तकोणाची बाजू $= \frac{२००० \times ५२०५५}{१२००००} = ८६७\frac{७}{१२}$ हें उत्तर.

याच पद्धतीनें अष्टकोणाची बाजू $७६५\frac{११}{३०}$ हें उत्तर.

नव कोणाची बाजू $६८३\frac{१७}{२०}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.



अ ब क हा समभुज त्रिकोण आहे याच्या बाजूचें प्रमाण काढणें आहे.

ईक = भुजज्या ६०° × त्रि

२ ईक = २ त्रि . भु . ६०°

$\therefore$ ज्या = २ त्रि × $\frac{\sqrt{३}}{२}$

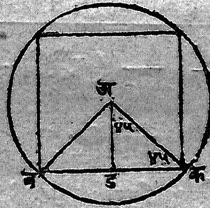
ज्या = त्रि $\sqrt{३}$

= १ . ७३००५ त्रि

ज्या = $\frac{१ . ७३२०५ \text{ व्यास}}{२}$

= $\frac{१७३२०५}{१००००० \times २} \times \frac{६}{६}$ व्यास

= $\frac{१०३९२३ \text{ व्यास}}{१२००००}$



डक = भुजज्या ४५° × त्रि.

२ डक = २ भू ४५° त्रि

$\therefore$ ज्या = २ त्रि भू ४५°

= २ त्रि × $\frac{१}{\sqrt{२}} \times \frac{\sqrt{२}}{\sqrt{२}}$

= $\frac{२ \text{ त्रि.} \sqrt{२}}{२}$

$$= \frac{\text{व्या. } १.४१४२१४}{२}$$

$$\therefore \text{ ज्या} = \frac{१४१४२१४}{१००००००} \cdot \frac{\text{व्या}}{२} \times \frac{६}{६}$$

$$= \frac{८४८९३ \text{ व्यास}}{१२००००} \text{ सुमारें.}$$

याच पद्धतीनें अन्य ज्या साधिल्या असतां सूत्रांतील गुणक व भाजक यांची सिद्धि होते.

सूत्रम्–चापोनाब्धिनपरिधिः प्रथमाह्वयः स्यात्पंचाहतः परिधिवर्गचतुर्थभागः॥ आद्योनितेन खलु तेन भजेच्चतुर्घ्नव्यासाहतं प्रथममाप्तमिह ज्यका स्यात्॥

अर्थ–समीकरणरूपानें.

$$\text{ज्या} = \frac{४ \text{ व्यास (परिधि–चाप) चाप}}{\frac{५ \text{ परिधि}^{२}}{४} - \text{(परिधि – चाप) चाप}}$$

उपपत्ति.

(परिधि–चाप). हेंच जीवा (ज्या) मान शून्य चाप असतां आहे हें उघड आहे. कारण शून्य चाप असतां भुजज्याही शून्य असते व (परिधि–चा) चा. या पदाचीही शून्य किंमत होते. यावांचून अन्य चाप असतां वरील (प–चा) चा ह्या पदास ज्या गुणकानें गुणले व ज्या हरानें भागिले असतां जीवामान येईल त्या गुणकाची किंमत क्ष आणि हराची किंमत य–(प–चा)चा अशी कल्पना करून क्षची व यची किंमत काढून जीवेच्या रीतीचें स्वरूप कसें येतें हें दाखवितों.

वरील धरलेल्या किमतीवरून

$$ज्या = \frac{क्ष\ (\ परिधि - चा\ )\ चा}{य - (\ परि - चा\ )\ चा}$$ ....(१)

आतां चाप १८० अंशाचे असेल तेव्हां वरच्या समीकरणाचें स्वरूप

$$व्यास = \frac{क्ष\ (\ परिधि - \frac{परिधि}{२}\ )\ \frac{परिधि}{२}}{य - (\ प - \frac{प}{२}\ )\ \frac{प}{२}}$$

$$\therefore ज्या = \frac{क्ष\ \frac{प^२}{४}}{य - \frac{प^२}{४}}$$

$\therefore$ क्ष$प^२$ = ४ य . ज्या - ज्या $प^२$ .... (२)

आणि चाप ६० अंशाचे असेल तेव्हां समीकरण (१) चें स्वरूप

$$\frac{व्यास}{२} = \frac{क्ष\ (\ प - \frac{प}{६}\ )\ \frac{प}{६}}{य - (\ प - \frac{प}{६}\ )\ \frac{प}{६}}$$

$$\frac{ज्या}{२} = \frac{क्ष\ \frac{५}{३६}\ प^२}{य - \frac{५}{३६}\ प^२}$$

$$\therefore \frac{ज्या}{२} = \frac{५\ क्ष\ प^२}{३६\ य - ५\ प^२}$$

$\therefore$ १० क्ष $प^२$ = ३६ य ज्या - ५ $प^२$ ज्या .... (३)

आतां (समीकरण) (२) व (३) यांवरून क्षची व यची किंमत काढून

$$क्ष = ४\ ज्या$$

$$य = \frac{५}{४}\ प^२$$

ह्या किंमती समीकरण (१) मध्यें ठेवून

$$\text{ज्या} = \frac{४ \text{ व्या} (\text{प} - \text{चा}) \text{चा}}{\frac{५}{४} \text{प}^{२} - (\text{प} - \text{चा}) \text{चा}}$$

∴ ह्मणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—अष्टादशांशेन वृतेः समानमेकादिनिघ्नेन च यत्र चापम् ॥ पृथक् पृथक् तत्र वदाऽऽशु जीवा खार्कैर्मितं व्यासदलं च यत्र ॥

अर्थ—ज्या वर्तुळाची त्रिज्या १२० आहे त्यांतील परिघाच्या $\frac{१}{१८}$, $\frac{२}{१८}$, $\frac{३}{१८}$, $\frac{४}{१८}$ इत्यादि कंसांच्या ज्या काय आहेत हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{परिघ} = \frac{१२० \times २ \times ३९२७}{१२५०} = ७५४ \text{ सुमारें}$$

$\frac{७५४}{१८} = ४२$ हें चाप.

$$\therefore \text{ज्या} = \frac{४ \text{ व्या} (\text{प} - \text{चा}) \text{चा}}{\frac{५}{४} \text{प}^{२} - (\text{प} - \text{चा}) \text{चा}}$$

यांत वरील किंमती ठेवून

ज्या = ४२ हें उत्तर.

तसेंच $\frac{७५४ \times २}{१८} = ८४$ ही चापाची किंमत ठेवून

ज्या = ८२ हें उत्तर

इत्यादि उत्तरें काढावीत.

सूत्रम्—व्यासाब्धिघातयुतमौर्विकया विभक्तो जीवांघ्रिपंचगुणितः परिधेस्तु वर्गः ॥ लब्धोनितात्परिधिवर्गचतुर्थभागादाप्ते पदे वृतिदलात्पतिते धनुःस्यात् ॥

अर्थ—समीकरणरूपानें देऊं

$$\text{चाप} = \frac{\text{परिधि}}{२} - \sqrt{\frac{\text{परिधि}^२}{४} - \frac{\frac{५}{४} - \text{ज्या} - \text{परिधि}^२}{४\ \text{व्यास} + \text{ज्या}}}$$

उपपत्ति.

मागील सूत्रावरून

$$\text{ज्या} = \frac{४\ \text{व्या}\ (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा}}{\frac{५}{४}\ \text{प}^२ - (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा}}$$

$$\therefore ४\ \text{व्या}\ (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा} = \frac{५}{४}\ \text{प}^२ - \text{ज्या} - \text{ज्या}\ (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा}$$

$$\therefore ४\ \text{व्या}\ (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा} + \text{ज्या}\ (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा} = \frac{५}{४}\ \text{प}^२ .\ \text{ज्या}$$

$$\text{चा}\ (\text{प} - \text{चा})\ (४\ \text{व्या} + \text{ज्या}) = \frac{५}{४}\ \text{प}^२ .\ \text{ज्या}$$

$$\text{प} . \text{चा} - \text{चा}^२ = \frac{५\ \text{प}^२ \cdot \text{ज्या}}{१६\ \text{व्या} + ४\ \text{ज्या}}$$

सर्वांचीं चिन्हें पालटून (प) च्या निमटीचा वर्ग उभय-पक्षांत मिळवून

$$\text{चा}^२ - \text{पचा} + \frac{\text{प}^२}{४} = \frac{\text{प}^२}{४} - \frac{५\ \text{प}^२\ \text{ज्या}}{१६\ \text{व्या} + ४\ \text{ज्या}}$$

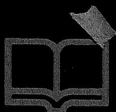
उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$\text{चा} - \frac{\text{प}}{२} = \pm \sqrt{\frac{\text{प}^२}{४} - \frac{\frac{५}{४}\ \text{प}^२\ \text{ज्या}}{४\ \text{व्या} + \text{ज्या}}}$$

$$\therefore \text{चाप} = \frac{\text{प}}{२} \pm \sqrt{\frac{\text{प}^२}{४} - \frac{\frac{५}{४}\ \text{प}^२\ \text{ज्या}}{४\ \text{व्या} + \text{ज्या}}}$$

ह्मणून इष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—विदिता इह ये गुणास्ततो वद तेषामधुना



धनुर्मितीः ॥ यदि तेऽस्ति धनुर्गुणक्रिया गणिते गाणति-कातिनैपुणम् ॥

अर्थ–पूर्वीच्या उदाहरणामध्यें ज्या जीवा साधल्या आहेत त्यांचीं चापें (कंस) किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम ज्या ४२ चा कंस काढूं.

$$\text{चाप} = \frac{\text{प}}{२} - \sqrt{\frac{\text{प}^{२}}{४} - \frac{\frac{५}{४}\text{प}^{२}\,\text{ज्या}}{४\,\text{व्या} + \text{ज्या}}}$$

ह्या समीकरणामध्यें प = ७५४; ज्या = ४२; व्या = २४० ह्या किंमती ठेवून—

चाप = ४२ हें उत्तर.

याप्रमाणें अन्यचापें आणावींत.

ह्याप्रमाणें क्षेत्रव्यवहार प्रकरणाचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

खातव्यवहार.

सूत्रम्—गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युति र्भाज्या ॥ स्थानकमित्या सममितिरेवं दैर्घ्ये च वेधे च ॥ क्षेत्रफलं वेध गुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात् ॥

अर्थ–ज्याची लांबी, रुंदी, व उंची ह्या प्रत्येकीं सारख्या नाहींत अशा एकाद्या खळग्याचें घनफळ काढावाचें असल्यास, त्या खळ-ग्याची अनेक ठिकाणचीं रुंदी मापून त्यांची बेरीज करावी. नंतर

जितक्या स्थळीं रुंदी मापली असेल त्या स्थान संख्येनें भागिलें असतां साधारण मध्यम प्रमाणांची रुंदी येईल. याच पद्धतीनें मध्यम प्रमाणाची लांबी व खोली काढावी. नंतर काढलेल्या लांबी रुंदीचा गुणाकार करून त्यास मध्यम खोलीनें गुणिलें असतां खळण्याचें घनफळ येईल

उदाहरणम्——भुजवक्रतया दैर्घ्यं दशेशार्ककरैर्मितम् । त्रिषु स्थानेषु षट्पंच सप्तहस्ता च विस्तृतिः ॥ यस्य खातस्य वेधोऽपि द्विचतुस्त्रिकरः सखे ॥ तत्र खाते कियंतः स्युर्घनहस्ताः प्रचक्ष्वमे ॥

अर्थ——ज्याच्या बाजू सर्वत्र वांकड्या असलेल्या खळगाची लांबी एके ठिकाणीं १० हात, दुसरें ठिकाणीं ११ हात व तिसरे ठिकाणीं १२ हात लांबी आहे. व त्या तीन ठिकाणीं रुंदी क्रमानें ५, ६, ७ हात; आणि खोलीही २, ३, ४ हात आहे तर त्या खळण्याचें घनफळ किती हात आहे हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{१२ + ११ + १०}{३}$ = ११ ही साधारण मध्यम प्रमाणाची लांबी झाली, व

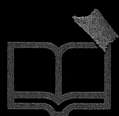
$\frac{७ + ६ + ५}{३}$ = ६ही मध्यम रुंदी;

आणि $\frac{२ + ३ + ४}{३}$ = ३ ही मध्यमखोली झाली म्हणून

११ × ६ × ३ = १९८ घनफल झालें हें उत्तर.

उपपत्ति.

तीन ठिकाणीं लांब्या निरनिराळ्या असल्यामुळें मध्यमप्रमाणाची लांबी काढली पाहिजे ह्मणून तिन्ही लांब्यांच्या बेरजेस



३ नें भागलें पाहिजे. व याच पद्धतीनें रुंदी व खोलीही काढली पाहिजे. आणि लांबी रुंदीच्या गुणाकारास उंचीनें गुणिलें असतां घनफळ येईल हें उघड आहे. ह्मणून इष्टसिद्धी झाली.

सूत्रम्—मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हृतं षड्भिः ॥ क्षेत्रफलं सममेतद्वेधगुणं घनफलं स्पष्टम् ॥ समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति ॥

अर्थ—जिचा पाया चतुष्कोणाकृती, पंचकोणाकृति, इत्यादिकांपैकीं असून भोवतालच्या सर्व बाजूत्रिकोणाकृति असतात. आणि ज्या बाजूचे शिरोबिंदू पायाचे वर एका बिंदूंत मिळतात अशा घनाकृतीस " सूचि " ह्मणजे शंकु म्हणतात.

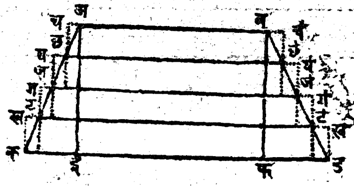
जर पायाशीं समांतर पातळीनें सूचीमध्येंच आडवी छेदिली तर तिचा जो खालच्या बाजूस तुकडा पडतो त्यास " **सूचिखंड** " असें म्हणतात.

जी आकृति पायापासून मुखापर्यंत एक सारख्या आकाराची असते तिला " **समखात** " असें म्हणतात.

सूचिखंडाचें घनफल काढणें झाल्यास, सूचि खंडाच्या पायाचें क्षेत्रफल, सूचिखंडाच्या मुखाचें क्षेत्रफल, व युतिजक्षेत्रफल (ह्मणजे पायाच्या लांबींत मुखाची लांबी मिळवून जी लांबी होईल ती, व पायाच्या रुंदींत मुखाची रुंदी मिळवून जी रुंदी होईल ती, या लांबीरुंदीपासून जें क्षेत्रफल होईल तें) या तिन्ही क्षेत्रफलांच्या बेरजेस ६ नीं भागून त्यास सूचिखंडाच्या उंचीनें गुणिलें असतां सूचिखंडाचें घनफल येतें.

समखाताच्या घनफलास ३ नें भागिलें असतां सूचीचें घनफल येईल.

उपपत्ति.



अ ब क ड हीं आपल्या समोर दिसणारी सूचिखंडाची बाजू आहे असें समजा. अ ई ही सूचिखंडाची उंची आहे. हें सूचिखंड पायाशीं समांतर पातळीनें टट', जज', छछ', या ठिकाणीं छिन्न केलें [कांपलें] असें समजा.

$$\text{आतां अ ब} = \text{म}$$

$$\text{क ड} = \text{त}$$

$$\text{अ ई} = \text{उ}$$

आणि पायाशीं समांतर जे कांप काढले आहेत त्यांची प्रत्येकामधील उंची आ आहे असें धरून

$$\frac{\text{उ}}{\text{त} - \text{म}} = \frac{\text{आ}}{\text{च अ} + \text{ब च}'}$$

$$\therefore \text{च अ} + \text{ब च}' = \frac{(\text{त} - \text{म})\,\text{आ}}{\text{उ}}$$

$\text{च अ} + \text{ब च}' = \text{ल}$ संज्ञा देऊन

$$\text{ल} = \frac{(\text{त} - \text{म})\,\text{आ}}{\text{उ}}$$

$$\therefore \text{म} + \text{ल} = \text{भुज छ छ}'$$

$$\therefore \text{म} + 2\text{ल} = \text{भुज ज ज}'$$

म + ३ ल = भुजं'' ट ट'

....

....

$\frac{\text{उ}}{\text{आ}}$ इतके भुज आहेत.

आतां रेखागणिताच्या ६ व्या अध्यायांतील सिद्धांत १९ प्रमाणें

$$\frac{\text{भुजं}^{2}}{\text{भुजं}'^{2}} = \frac{\text{क्षेत्रफळ}}{\text{क्षेत्रफळ}'}$$

असें आहे यावरून स्पष्ट दिसतें कीं सजातीय क्षेत्रांपैकीं एकाच्या क्षेत्रांतील भुजवर्गास ज्या संख्येनें गुणिलें असतां त्याचें क्षेत्रफळ येईल त्याच संख्येनें दुसऱ्या क्षेत्राच्या भुजवर्गास गुणिलें असतां दुसऱ्याचें क्षेत्रफल येतें ह्मणून भुजवर्गाचे गुणकास गा ही संज्ञा देऊन या क्षेत्रफलास आ ह्या उंचीनें गुणिलें असतां प्रत्येक समखाताचें घनफल येईल. ह्मणून

छछंभुजं × गा × आ = चछचंछं ह्या समखाताचें घनफल.

जजंभुजं² × गा × आ = दुसऱ्या समखाताचें घनफल.

भुं''² . गा . आ = तृतीय समखात घनफल.

....

....

इत्यादि $\frac{\text{उ}}{\text{आ}}$ समखातांचीं घनफलें.

∴ सर्व समखात घनफलैक्य = (भुं² + भुं'³ + भुं'' ....) × गा × आ

यांत भुजवर्गाच्या किमती ठेवून

सर्व समखात घनफलैक्य = { (म + ल)² +

$(म + २ ल)^2 + म + ३ ल)^2 + (म + ४ ल)^2$ ...

.... इत्यादि $\frac{उ}{आ}$ पदें } × गा × आ

आतां यांतील जीं वर्गपदें आहेत त्यांचे वर्ग करून क्रमानें समीकरण लिहून दाखवितों.

कंसांतील पदांचे वर्ग

$म^2 + २ मल + ल^2$

$म^2 + ४ मल + ४ ल^2$

$म^2 + ६ मल + ९ ल^2$

....

....

इत्यादि $\frac{उ}{आ}$ पदें आहेत.

यांतील पहिल्या पदांची बेरीज =

$म^2 + म^2 + म^2 + ...$ इत्यादि $\frac{उ}{आ} = \frac{म^2 . उ}{आ}$

दुसऱ्या पदांची बेरीज =

२ मल + ४ मल + ६ मल .... इत्यादि $\frac{उ}{आ}$ प

= २ मल (१ + २ + ३ + ४ + ... इत्यादि $\frac{उ}{आ}$ पदें)

$= २ मल (\frac{उ}{आ} + १) \frac{उ}{२ आ} = मल (उ + आ) \frac{उ}{आ^2}$

आणि तिसऱ्या पदांची बेरीज =

$$\text{लं}^{२} + ४\ \text{लं}^{२} + ९\ \text{लं}^{२} + \ldots\ldots \text{ इत्यादि } \frac{\text{उ}}{\text{आ}} \text{ पदें}$$

$$= \text{लं}^{२} \left(१^{२} + २^{२} + ३^{२} + ४^{२} + \ldots\ldots \text{ इत्यादि } \frac{\text{उ}}{\text{आ}} \text{ पदें} \right)$$

$$= \text{ल} \times \frac{\frac{२\ \text{उ}}{\text{आ}} + १}{३} \times \frac{(\text{उ} + \text{आ})\ \text{उ}}{२\ \text{आ}^{२}}$$

$$= \text{लं}^{२} \left(२\ \text{उ}^{३} + ३\ \text{आ}\,.\,\text{उ} + \text{आ}^{२} \right) \frac{\text{उ}}{६\ \text{आ}^{३}}$$

∴ सर्व समखात घनफलैक्य =

$$\left\{ \frac{\text{मे}^{२}\text{उ}}{\text{आ}} + \text{मल}(\text{उ}+\text{आ}) \frac{\text{उ}}{\text{आ}^{२}} + \text{लं}^{२}(२\ \text{उ}^{३} + ३\ \text{आउ} + \text{आ}^{२}) \frac{\text{उ}}{६\ \text{आ}^{३}} \right\} \times \text{गा} \times \text{आ}$$

$$= \text{मे}^{२}.\text{उ}.\text{गा} + \text{मल}(\text{उ}+\text{आ}) \frac{\text{उ}.\text{गा}}{\text{आ}} + \text{लं}^{२}(२\ \text{उ}^{३} + ३\ \text{आउ} + \text{आ}^{२}) \times \frac{\text{उगा}}{६\ \text{आ}^{२}}$$

यांत $\text{ल} = \frac{(\text{त} - \text{म})\ \text{आ}}{\text{उ}}$ ही मागें सिद्ध केलेली किंमत ठेवून

सर्व समखात घनफलैक्य = $\text{मे}^{२}\,.\,\text{उ}\,.\,\text{गा}\ +$

$$\text{म}(\text{त}-\text{म})(\text{उ}+\text{आ})\text{गा} + (\text{त}-\text{म})^{२}\,(२\text{उ}^{२}+३\text{आउ}+\text{आ}^{२})\,\frac{\text{गा}}{६\ \text{उ}}$$

आतां या समीकरणामध्यें आ = ० किंमत धरली असतां सूचिखंडाचेंच घनफल होईल हें उघड आहे म्हणून अ ब क ड ह्या सूचिखंडाचें घनफल =

$$\text{मे}^{२}\,.\,\text{उ}\,.\,\text{गा} + \text{म}\,(\text{त} - \text{म})\,\text{उ}\,.\,\text{गा} + (\text{त}-\text{म})^{२}\,\frac{\text{उगा}}{३}$$

$$= \frac{\text{उगा}}{३}\left(३\,\text{म}^{२} + ३\,\text{मत} - ३\,\text{म}^{२} + \text{त}^{२} + \text{म}^{२} - २\,\text{तम}\right)$$

$$= \frac{\text{उगा}}{३}\left(\text{म}^{२} + \text{मत} + \text{त}^{२}\right) \times \frac{२}{२}$$

$$= \frac{\text{उ}}{६}\left(२\,\text{म}^{२}\,\text{गा} + २\,\text{मत गा} + २\,\text{त}^{२}\,\text{गा}\right)$$

$$\therefore \text{सूचिखंडघनफल} = \frac{\text{उ}}{६}\left(\text{म}^{२}\,\text{गा} + \text{त}^{२}\,\text{गा} + (\text{म} + \text{त})^{२}\,\text{गा}\right)$$

$$\therefore \text{सूचिखंडघनफल} = \frac{\text{उ}}{६}\left(\text{मुखजक्षेत्रफल} + \text{तलज क्षेत्रफल} + \text{युतिजक्षेत्रफल}\right)$$

वरील समीकरणामध्यें म = ० किंमत धरली असतां सूचीचें घनफल येईल.

$$\therefore \text{सूचिघनफल} = \frac{\text{तलजक्षेत्रफळ} \times \text{उ}}{३}$$

∴ इष्टसिद्धि झाली.

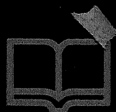
उदाहरणम्—मुखे दशद्वादशहस्ततुल्यं विस्तारदैर्घ्यं तु तले तदर्धम् यस्याः सखे सप्तकरश्च वेधः का खातसंख्या वद तत्र वाप्याम् ॥

अर्थ—एक सुचिखंडाकृति विहीर आहे. तिची तोंडाकडील रुंदी १० हात, व लांबी १२ हात आहे. आणि याच्या निम्मे लांबी रुंदी तळाकडे आहे व त्या विहिरीची उंची ७ हात आहे तर त्या विहिरीचें घनफल काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१२ × १० = १२० हें मुखजक्षेत्रफळ.

६ × ५ = ३० हें तलजक्षेत्रफल,



(१२ + ६) (१० + ५) = २७० हें युतिजक्षेत्रफल.

या तिन्ही क्षेत्रफळांची बेरीज ४२० हिला ६ नीं भागून ७० यास उंची ७ नें गुणून ४९० हें विहीरीचें घनफळ झालें हें उत्तर.

उदाहरणम्—खातेऽथ तिग्मकरतुल्यचतुर्भुजे च किं स्यात्फलं नवमितः किल यत्र वेधः ॥ वृत्ते तथैव दशवि- स्तृतिपंचवेधे सूचीफलं वद तयोश्च पृथक् पृथक्मे ॥

अर्थ—ज्याची प्रत्येक बाजू १२ हात आहे असा एक चौरसाकृति खळगा आहे व त्याची खोली ९ हात आहे तर त्याचें घनफल काय हें सांग ?

ज्याचा व्यास १० हात व खोली ५ हात आहे अशा वर्तुळाकृति खळग्याचें घनफल काय हें सांग ?

वरील दोन्ही खळगे सूचीच्या आकृतीचे असतील तर त्याची घनफलें काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पहिलें उदाहरण—लांबी १२ रुंदी १२ व उंची ९ यांचा गुणाकार १२९६ हें खळग्याचें घनफळ झालें हें उत्तर.

हाच खळगा सूच्याकृति मानून १२९६ यास ३ नें भागून ४३२ सूचिखाताचें घनफळ झालें हें उत्तर.

दुसरें उदाहरण—व्यास १० यास ३९२७ नीं गुणून १२५० नीं भागून सूक्ष्मपरिधि $\frac{३९२७}{१२५}$ इतका आला यास $\frac{१०}{४}$ नें गुणून $\frac{३९२७}{५००}$ हें तळाचें क्षेत्रफळ झालें यास उंची ५ नें गुणून $\frac{३९२७}{१००}$ इतकें घनफळ वृत्ताकृति समखाताचें झालें हें उत्तर.

हाच खळगा सूच्याकृति मानून $\frac{३९२७}{१००}$ या समखाताचें घनफळास ३ नें भागून $\frac{३९२७}{३००}$ इतकें वृत्तसूचीचें घनफळ झालें हें उत्तर.

याप्रमाणें खातव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

चितिव्यवहार.

---:o:---

सूत्रम्—उच्छ्रयेण गुणितं चितेः किल क्षेत्रसंभवफलं घनं भवेत् ॥ इष्टिकाघनहृते घने चितेरिष्टिकापरिमितिश्च लभ्यते ॥ इष्टिकोच्छ्रयहृदुच्छ्रितिश्चितेः स्युस्तराश्च दृषदां चितेरपि ॥

अर्थ—ज्या घनाकृतीच्या दोन्ही शेवटांच्या पातळ्या सरळ, एकरूप, व समांतर असतात. आणि सभोंवतालच्या सर्व बाजू या दोन्ही शेवटांस निकटलेल्या असून समांतरभुज चौकोन असतात. त्या घनाकृतीस "चिति" असें ह्मणतात. इंग्रजी भाषेमध्यें चितीला प्रिझम असें म्हणतात.

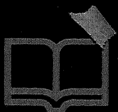
चितीच्या तळाचें क्षेत्रफळ काढून त्यास चितीच्या उंचीनें गुणिलें असतां चितीचें घनफळ येतें.

चितीच्या घनफळास विटेच्या घनफळानें भागिलें असतां चितींतील विटांची संख्या येते.

चितीच्या उंचीस विटेच्या उंचीनें भागिलें असतां चितींतील विटांच्या थरांची संख्या येते.

उदाहरणम्—अष्टादशांगुलं दैर्घ्यं विस्तारो द्वादशांगुलः ॥ उच्छ्रितिस्त्र्यंगुला यासामिष्टिकास्ताश्चितौ किल ॥ यद्विस्तृतिः पंचकराष्टहस्तं दैर्घ्यंच यस्यां त्रिकरोच्छ्रितिश्च ॥ तस्यां चितौ किं फलमिष्टिकानां संख्या च का ब्रूहि कतिस्तराश्च ॥

अर्थ—ज्या विटेची लांबी १८ अंगुलें, रुंदी १२ अंगुलें व जाडी ३ अंगुलें अशा विटांनीं; जिची लांबी ८ हात, रुंदी ५



हात, व उंची ३ हात अशी काटकोन चौकोनाकृति चिति बांधावयाची आहे तर त्या चितीचें घनफळ काय होईल ? तसेंच तिला ज्या विटा लागतील त्यांची संख्या काय ? व थर किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

८ × ५ × ३ = १२० घनहात चितीचें घनफल हें उत्तर.

३/४ × १/२ × १/८ = ३/६४ घनहात हें विटेचें घनफल झालें यानें चितीचे घनफळास १२० भागून २५६० विटांची संख्या हें उत्तर.

चितीची उंची ३ हात यांस १/८ हात विटेच्या जाडीनें भागून २४ थर विटांचे होतील हें उत्तर.

या रीतीची उपपत्ति अत्यंत सुलभ असल्यामुळें ती येथें दिली नाहीं.

याप्रमाणें चितिव्यवहाराचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

क्रकचव्यवहार.

सूत्रम्-पिंडयोगदलमग्रमूलयोर्दैर्घ्यसंगुणितमंगुलात्मकम् ॥ दारुदारणपथैः समाहतं षट्स्वरेषु विहृतं करात्मकम् ॥

अर्थ—करवतीनें लांकडें कांपणाऱ्यांचे कामाचें माप करावयाचें झाल्यास, लांकडाचें मूळ व शेवट या दोन्ही तोंडांच्या जाडीच्या बेरजेचे अर्धास लांकडाच्या लांबीनें गुणिलें असतां लांकडाच्या एका उभ्या कांपाचें क्षेत्रफळ येतें. नंतर त्यास तें लांकूड जितक्या ठिकाणीं कांपिलें असेल त्या स्थानांच्या संख्येनें गुणिलें असतां सर्व कांपांचें क्षेत्रफळ होतें. जर

क्षेत्रकळ अंगुलात्मक असेल तर त्यास ५७६ नीं भागिलें असतां क्षेत्रफळ हस्तात्मक होईल.

उदाहरणम्-मूले नखांगुलमितोऽथ नृपांगुलोऽग्रे पिंडः शतांगुलमितं किल यस्य दैर्घ्यम् ॥ तद्दारुदारणपथेषु चतुर्षु किं स्याद्धस्तात्मकं वद सखे गणितं द्रुतं मे ॥

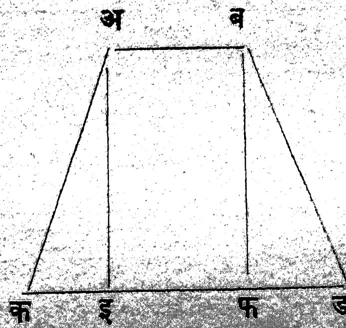
अर्थ-ज्या चतुरस्त्र लांकडाची मूळाकडील जाडी २० अंगुळें, व शेवटाकडील जाडी १६ अंगुळें, व लांबी १०० अंगुळें आहे. या लांकडाचे उभे कांप ४ केले असतां त्या कांपांचें क्षेत्रफळ हस्तात्मक काय होईल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{\frac{२०+१६}{२}\times १०० \times ४}{५७६} = \frac{२५}{२} \text{ हस्तात्मक क्षेत्रफल}$$

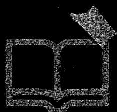
४ कांपांचें हें उत्तर.

उपपत्ति.



करवतीनें कापून लांकडाची निघालेली फळी अबकड ही आहे. यांतील अब ही लांकडाची जाडी शेवटाकडील आहे व कड ही जाडी मूळाकडील आहे असें समजा.

आतां अबकड या कांपाचें क्षेत्रफळ काढावयाचें आहे.



अबकड क्षेत्रफळ = △ अकई + △ बफड + □ अबईफ

$$\therefore \text{अबकड क्षेत्रफळ} = \frac{\text{अई} \times \text{कई}}{२} + \frac{\text{अई} \times \text{फड}}{२} + \text{अई} \times \text{ईफ}$$

$$\therefore \text{क्षे. फ.} = \frac{\text{अई} (\text{कई} + \text{फड} + २ \text{ ईफ})}{२}$$

हें एका कांपाचें क्षेत्रफळ झालें यास कांपाच्या संख्येनें गुणिलें असतां सर्व कांपाचें क्षेत्रफल होईल.

∴ इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्–छिद्यते तु यदि तिर्यगुक्तवत्पिंडविस्तृतिहतेः फलं तदा ॥ इष्टिकाचितिदृषच्चितिखातक्राकचव्यवहृतौ खलु मूल्यम् कर्मकारजनसंप्रतिपत्त्या तन्मृदुत्वकठिनत्ववशेन ॥

अर्थ–लांकूड चौकोनी असून मुळापासून शेवटांपर्यंत सर्वत्र सारख्या आकाराचें असेल ह्मणजे जाडी व रुंदी कोठेंही कम जास्त नाहीं. असें लांकूड आंडवें कांपिलेलें असल्यास जाडी व रुंदी यांचा गुणाकार केला असतां एका कांपाचें क्षेत्रफळ येतें यास कांपांच्या स्थानसंख्येनें गुणिलें असतां सर्व कांपांचें क्षेत्रफळ येईल हें उघड आहे.

विटांची चिति, पाषाणाची चिति, खात (खळग्याचें काम) व क्राकच (करवतीचें काम) या व्यवहारामध्यें वस्तूंचा मृदुपणा व कठिणपणा ह्यावर अवलंबून कामाचें मौल्य असतें.

उदाहरणम्—यद्विस्तृतिर्दंतमितांगुलानि पिंडस्तथा षोडश यत्र काष्ठे ॥ छेदेषु तिर्यङ्नवसुप्रचक्ष्व किं स्यात्फलं तत्र करात्मकं मे ॥

अर्थ—ज्याची रुंदी ३२ अंगुळें व जाडी १६ अंगुळें अशा

सर्वत्र सारख्या आकाराचे चौकोनी लांकडाचे ९ कांप आडवे केले असतां त्या कापांचें क्षेत्रफळ काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{३२ \times १६ \times ९}{५७६}$ = ८ हात क्षेत्रफळ हें उत्तर.

याप्रमाणें क्रकचव्यवहाराचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

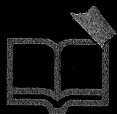
राशिव्यवहार

—:o:—

सूत्रम्—अनणुषुदशमांशोऽणुष्वथैकादशांशः परिधिनवमभागः शूकधान्येषु वेधः ॥ भवति परिधिषष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने घनगणितकराःस्युर्मागधास्ताश्च खार्यः ॥

अर्थ—ज्वारी, उडीद, तुरी, चणे इत्यादि स्थूल धान्यांची रास सपाट जमिनीवर असली तर तिच्या परिघाच्या दहाव्या हिश्शाबरोबर मधील उंची असते. नाचणे, राळे, खसखस, राजगिरे, इत्यादि सूक्ष्म धान्याची रास असल्यास परिघाचा ११ वा हिस्सा मधील उंची असते. गहू, तांदूळ इत्यादि शूक धान्याची रास असल्यास परिघाचा ९ वा हिस्सा मधील उंची असते. ह्या उंची प्रत्यक्ष अनुभवावरून काढिल्या आहेत.

धान्य राशीच्या परिघास ६ नें भागून वर्ग करावा. त्या वर्गास धान्य राशीच्या उंचीनें गुणून जो गुणाकार येईल तितके घनहात किंवा तितक्याच मागध खारिका धान्याची रास आहे असें समजावें.



उपपत्ति.

सम भूमीवर धान्यराशी वृत्तसूच्याकार असतो ह्मणून वृत्त-सूचीचें घनफळ काढणें हें कर्तव्य आहे.

क्षेत्रव्यवहारांतील " वृत्तक्षेत्रेपरिधिगुणित व्यास पादः फल " यासूत्रानें धान्यराशीच्या तळाचें क्षेत्रफल

$\frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{४}$ हें आहे त्यांत

$\text{व्यास} = \frac{\text{परिधि}}{३}$ सुमारें धरून

$$\text{तलक्षेत्रफल} = \frac{\text{परिधि}}{४} \times \frac{\text{परिधि}}{३}$$

व खातव्यवहारांतील " क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्त संख्या स्यात् " या सूत्रानें

$$\text{समखातघनफल} = \frac{\text{परिधि}}{४} \times \frac{\text{परिधि}}{३} \times \text{उंची}$$

नंतर " समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलंभवति " या सूत्रानें

$$\text{धान्यराशिघनफल} = \frac{\text{परिधि}}{४} \times \frac{\text{परिधि}}{३} \times \frac{\text{उंची}}{३}$$

$$\therefore \text{धा. रा. घ.} = \frac{\text{परिधि}^{२} \times \text{उ}}{३६}$$

$$\therefore \text{घ.} = \left(\frac{\text{परिधि}}{६}\right)^{२} \times \text{उंची}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्–समभुवि किल राशिर्यः स्थितः स्थूलधान्यः परिधिपरिमितिर्भोहस्तषष्ट्यदीया ॥ मवद गणक खार्यः किंमिताः संति तस्मिन्नथ पृथगणुधान्ये शूकधान्ये च शीघ्रं ॥

अर्थ—सपाट जमिनीवर एक स्थूल धान्याची रास आहे. तिचा परिघ ६० हात आहे तर त्या राशीमध्यें किती मागध खारिका धान्य आहे ? व तीच रास सूक्ष्म धान्याची किंवा शूकधान्याची असेल तर किती मागध खारिका धान्य असेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें परिधि ६० आहे म्हणून याचा दशमांश ६ ही धान्य राशीची उंची

∴ मागधखारिका = $(\frac{६०}{६})^{२} \times ६ = ६००$ हें उत्तर.

सूक्ष्मधान्याची रास असल्यास $\frac{६०}{११}$ ही धान्यराशीची उंची झाली.

∴ मागधखारिका = $(\frac{६०}{६})^{२} \times \frac{६०}{११} = \frac{६०००}{११}$ हें उत्तर.

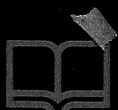
शूकधान्याची रास असल्यास $\frac{६०}{९}$ ही उंची झाली.

∴ खारिका = $(\frac{६०}{६})^{२} \times \frac{६०}{९} = \frac{६०००}{९}$ हें उत्तर.

सूत्रम्–द्विवेदसत्रिभागैकनिघ्नात्तु परिधेः फलम् ॥ भित्त्यंतर्बाह्यकोणस्थराशेः स्वगुणभाजितम् ॥

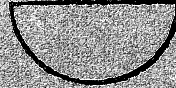
अर्थ—धान्यराशि भिंतीला लागली असल्यास परिघ अर्धवृत्ताकार असतो ह्मणून त्याची दुप्पट करून पूर्वोक्त पद्धतीनें खारिका आणल्या असतां धान्यमान दुप्पट येईल त्याचें अर्ध केलें ह्मणजे भिंतीला लागलेल्या धान्याचें मान येईल.

धान्यराशि दोन भिंतीच्या कोंपऱ्यांत असल्यास त्याचा परिघ $\frac{१}{४}$ असतो ह्मणून त्याची चौपट करून पूर्वोक्त पद्धतीनें धान्यमान जें येईल तें चौपटीनें जास्त येईल करितां त्यास ४ नीं भागून धान्यमान येईल.

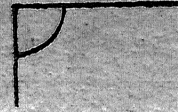


तसेंच धान्यराशि दोन भिंतींच्या बाहेरील कोंपऱ्यास लागून असल्यास $\frac{3}{4}$ वर्तुळाच्या आकाराचा परिघ त्या राशीचा असतो म्हणून त्या परिघाची $\frac{4}{3}$ पट करून पूर्ववत् मागध खारिका ज्या येतील त्या $\frac{4}{3}$ पटीनें अधिक होतील म्हणून $\frac{4}{3}$ नें त्यास भागिलें असतां बाहेरील कोंपऱ्यास लागलेल्या धान्यराशीचें मान येतें.

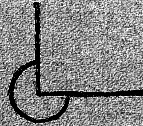
याची उपपत्ति खालीं दिलेल्या केवळ आकृतीवरून स्पष्ट होईल भिंतीस लागलेला धान्यराशि



दोन भिंतींच्या कोंपऱ्यांत असलेला राशि



भित्तिबाह्यलग्नराशि



उदाहरणम्---परिधिर्भित्तिलग्नस्यराशे स्त्रिंशत्करः सखे ॥ अंतःकोणस्थितस्यापि तिथितुल्यकरःकिल ॥ बहिःकोणस्थितस्यापिपंचघ्ननवसंमिताः ॥ तेषामाचक्ष्वमेक्षिप्रं घनहस्तान् पृथक् पृथक् ॥

अर्थ---भिंतीस लागून असलेल्या धान्यराशीचा परिघ ३० हात, भिंतीच्या कोंपऱ्यांत लागलेल्या राशीचा परिघ १५ हात,

आणि बाहेरील कोंपऱ्यास लागून असलेल्या राशीचा परिघ ४१ हात आहे तर त्या तिन्ही राशींत पृथक् पृथक् धान्य किती आहे हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पूर्वोक्त सर्व क्रिया करून

३०० घनहात	भित्तिलग्नराशींत स्थूल धान्य	हें उत्तर.
१५०	कोणसंलग्न.........	
४५०	बाह्यकोणसंलग्न.........	

याप्रमाणें राशिव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

छायाव्यवहार.

——:o:——

सूत्रम्—छाययोः कर्णयोरंतरे ये तयोर्वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीषवः ॥ सैकलब्धेः पदघ्नं तु कर्णांतरं भांतरेणोनयुक्तं दले स्तः प्रभे ॥

अर्थ—द्वादशांगुल शंकूच्या दोन वेळच्या छायांचें अंतर व त्याच वेळच्या कर्णांचें अंतर यांपासून त्या दोन वेळच्या छाया काढण्याची रीति या सूत्रांत दिली आहे.

छायांतराच्या वर्गांतून कर्णांतराचा वर्ग वजा करून जी बाकी राहील तिनें ५७६ स भागावें. आलेल्या भागाकारांत १ मिळवून त्याचें वर्गमूळ काढावें. त्या वर्गमूळास कर्णांतरानें गुणून आलेला गुणाकार दोन ठिकाणीं मांडून एका ठिकाणीं छायांतर मिळवावें. व दुसऱ्या ठिकाणीं छायांतर वजा करावें. आणि त्यांचीं अर्धें केलीं असतां दोन्ही छायांचीं मानें येतात.

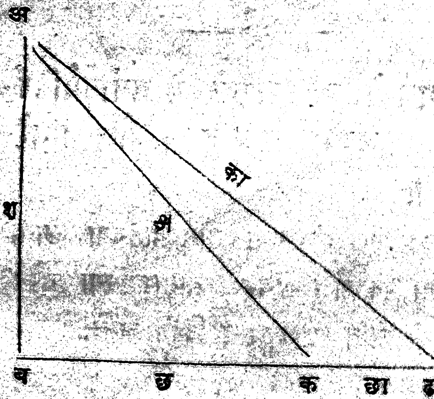
उदाहरणम्—नंदचंद्रैर्मितं छाययोरंतरं कर्णयोश्चांतरं विश्वतुल्यं ययोः ॥ ते प्रभे वक्ति यो युक्तिमान् वेत्यसौ व्यक्तमव्यक्तयुक्तं हि मन्येऽखिलं ॥

अर्थ—१२ अंगुळें शंकूच्या दोन वेळच्या छायांचें अंतर १९ व कर्णांचें अंतर १३ आहे. तर छायांचीं मानें काय आहेत हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१९ चा वर्ग ३६१ यांतून १३ चा वर्ग १६९ वजा करून बाकी १९२ हिनें ५७६ स भागून लब्धि ३ यांत १ मिळवून ४ याचें वर्गमूळ २ यास कर्णांतर १३ नें गुणून २६ यांत छायांतर १९ मिळवून व वजा करून ४५ व ७ यांचीं अर्धें $\frac{४५}{२}$ व $\frac{७}{२}$ ह्या छाया हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब या १२ अंगुळ शंकु = श; बक छाया = छ; बड दुसरी छाया = छा; अक कर्ण = क; अड दुसरा कर्ण = का; याप्रमाणें संज्ञा देऊन.

$$श^2 = का^2 - छा^2$$

$$श^2 = क^2 - छ^2$$

या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून

$\text{य}^{२} - \text{श}^{२} = \text{का}^{२} - \text{छा}^{२} - \text{क}^{२} + \text{छ}^{२}$

$\therefore \text{छा}^{२} - \text{छ}^{२} = \text{का}^{२} - \text{क}^{२}$

$\therefore (\text{छा} + \text{छ})(\text{छा} - \text{छ}) = (\text{का} + \text{क})(\text{का} - \text{क})$

$\left.\begin{array}{l} \text{छा} - \text{छ} = \text{म} \\ \text{का} - \text{क} = \text{न} \end{array}\right\}$ अशा संज्ञा देऊन

$(\text{छा} + \text{छ})\,\text{म} = (\text{का} + \text{क})\,\text{न}$ ....(१)

$\text{छा} - \text{छ} = \text{म}$

$\therefore \text{छा} - \text{छ} + \text{छ} = \text{म} + \text{छ}$

$\therefore \text{छा} + \text{छ} = \text{म} + २\,\text{छ}$ ....(२)

$\text{का} - \text{क} = \text{न}$

$\therefore \text{का} + \text{क} = \text{न} + २\,\text{क}$ ....(३)

समीकरण (१) मध्यें (२) व (३) पैकीं किमती ठेवून

$(\text{म} + २\,\text{छ})\,\text{म} = (\text{न} + २\,\text{क})\,\text{न}$

$\therefore \text{म}^{२} + २\,\text{छम} = \text{न}^{२} + २\,\text{कन}$

$\therefore \text{म}^{२} - \text{न}^{२} + २\,\text{छम} = २\,\text{कन}$

या समीकरणांत $\text{क} = \sqrt{\text{श}^{२} + \text{छ}^{२}}$ ही किंमत ठेवून

$\text{म}^{२} - \text{न}^{२} + २\,\text{छम} = २\,\text{न}\sqrt{\text{श}^{२} + \text{छ}^{२}}$

उभयपक्षांचा वर्ग करून

$(\text{म}^{२} - \text{न}^{२})^{२} + ४\,\text{छ}^{२}\text{म}^{२} + ४\,\text{छम}(\text{म}^{२} - \text{न}^{२}) = ४\,\text{न}^{२}(\text{श}^{२} + \text{छ}^{२})$

$४\,\text{छ}^{२}\text{म}^{२} + ४\,\text{छम}(\text{म}^{२} - \text{न}^{२}) = ४\,\text{न}^{२}\text{श}^{२} + ४\,\text{न}^{२}\text{छ}^{२} - (\text{म}^{२} - \text{न}^{२})^{२}$

$४\,\text{छ}^{२}(\text{म}^{२} - \text{न}^{२}) + ४\,\text{छम}(\text{म}^{२} - \text{न}^{२}) = ४\,\text{न}^{२}\text{श}^{२} - (\text{म}^{२} - \text{न}^{२})^{२}$

उभयपक्षांस $(\text{म}^{२} - \text{न}^{२})$ यानें भागून व $\text{म}^{२}$ मिळवून

$$४ छ^२ + ४ छम + म^२ = \frac{४ न^२ श^२ - (म^२ - न^२)^२}{म^२ - न^२} + म^२$$

उभयपक्षांचीं मुळें काढून

$$२ छ + म = \sqrt{\frac{४ न^२ श^२ - न^४ + म^२ न^२}{म^२ - न^२}}$$

$$\therefore छ = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\frac{४ न^२ श^२ - न^४ + म^२ न^२}{म^२ - न^२}} - म \right\}$$

$$\therefore छ = \frac{१}{२} \left\{ न \sqrt{\frac{४ श^२}{म^२ - न^२} + \frac{म^२ - न^२}{म^२ - न^२}} - म \right\}$$

$$\therefore छ = \frac{१}{२} \left\{ न \sqrt{\frac{४ श^२}{म^२ - न^२} + १} - म \right\} \ldots .(४)$$

आतां छा − छ = म आहे

$\therefore छा = छ + म$

$\therefore छ = छा - म$

ही किंमत (४) मध्यें ठेऊन

$$छा = \frac{१}{२} \left\{ न \sqrt{\frac{४ श^२}{म^२ - न^२} + १} - म \right\} + म$$

$$= \frac{न \sqrt{\frac{४ श^२}{म^२ - न^२} + १}}{२} - \frac{म}{२} + म$$

$$२ छा = न \sqrt{\frac{४ श^२}{म^२ - न^२} + १} - म + २ म$$

यांत $श^२ = १२^२ = १४४$ ही किंमत ठेऊन

$$छा = \frac{१}{२}\left\{ न \sqrt{\frac{१७६}{म^{२} - न^{२}} + १} + म \right\} \ldots\ldots (५)$$

∴ समीकरण (४) व (५) यांवरून इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

सूत्रम्—शंकुः प्रदीपतलशंकुतलांतरघ्नश्छाया भवेद्वि नरदीपशिखौच्च्यभक्तः ॥

अर्थ—दीपतल व शंकुतल यांच्या अंतरानें १२ स गुणून त्यास, दीपाच्या उंचींतून शंकूची उंची वजा करून बाकीनें भागिलें असतां छायेचें मान येतें.

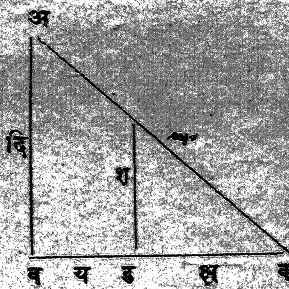
उदाहरणम्—शंकुप्रदीपांतरभूस्त्रिहस्ता दीपोच्छ्रितिः सार्धकरत्रया चेत् ॥ शंकोस्तदाऽर्कांगुलसंमितस्य तस्य प्रभा स्यात्कियती वदाऽऽशु ॥

अर्थ—शंकुतल व दीपतल यांचें अंतर २ हात आहे व दीपाची उंची २½ हात आहे तर त्या १२ अंगुल शंकूची छाया किती पडेल हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

शंकूची उंची $\frac{१}{२}$ हात यास ३ नें गुणून $\frac{३}{२}$ यांस, दीपाची उंची $\frac{५}{२}$ हात यांतून $\frac{१}{२}$ शंकूवजा करून बाकी ३ हिनें भागून $\frac{१}{२}$ हात म्हणजे १२ अंगुळें छाया हें उत्तर

उपपत्ति.



या आकृतीमध्यें अ ब ह्या दीपाच्या उंची = दी; डई ह्या द्वादशांगुल शंकू = श; बड ह्या दीपतल व शंकुतल यांच्या अंतरा = य; ड क ही छाया = क्ष अशा संज्ञा देऊन

$$\frac{क्ष}{श} = \frac{य + क्ष}{दी.}$$

कारण अ ब क आणि ई ड क हे दोन्ही त्रिकोणतरूप आहेत.

$\therefore$ क्षदी = श य + श क्ष

$\therefore$ क्षदी − श क्ष = शय

$\therefore$ क्ष (दी − श) = शय

$$\therefore क्ष = \frac{श य}{दी − श}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्---छायोद्धृते तु नरदीपतलांतरघ्ने शंकौ भवेन्नरयुते खलु दीपकौच्च्यम् ॥

अर्थ—शंकु व दीप यांच्या अंतरास छायेनें भागून शंकूनें गुणावें व त्यांत शंकु मिळवावा म्हणजे दीपाची उंची येते.

उदाहरणम्—प्रदीपशंक्वंतरभूस्त्रिहस्ता छायांगुलैः षोडशभिः समा चेत् ॥ दीपोच्छ्रुतिः स्यात्कियती वदाऽऽशु प्रदीपशंक्वंतरमुच्यतां मे ॥

अर्थ—दीप व शंकु यांचें अंतर ३ हात, व १६ अंगुळें शंकूची छाया आहे तर दीपाची उंची किती हें सांग ?

दुसरें उदाहरण---वरील उदाहरण सोडवून जी दीपाची उंची येईल ती व शंकूची १६ अंगुळें छाया यांवरून दीप व शंकु यामधील अंतर सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

अंतर ३ यास $\frac{१}{२}$ नें गुणून $\frac{३}{२}$ यास $\frac{१२}{७}$ हात छायेनें भागून $\frac{७}{८}$ यांत $\frac{१}{२}$ शंकु मिळवून $\frac{११}{८}$ हात दीपाची उंची हे उत्तर.

आतां दुसरें उदारण सोडविण्यास सूत्र निराळें आहे तें देऊन उदाहरण सोडवून दोन्हीं सूत्रांची उत्पत्ती एकदम देऊं.

सूत्रम्—विशंकुदीपोच्छ्रय संगुणा भा शंकूद्धृता दीपनरांतरं स्यात् ॥

अर्थ—दीपाच्या उंचीतून शंकु वजा करून बाकीनें छायेस गुणिलें असतां व शंकूनें भागिलें असतां दीप व शंकु या मधील अंतर येतें.

∴ $\frac{११}{८}$ दीपाच्या उंचींतून $\frac{१}{२}$ शंकु वजा करून बाकी $\frac{७}{८}$ यास $\frac{१२}{७}$ छायेनें गुणून व $\frac{१}{२}$ शंकूनें भागून अंतर ३ हात हें उत्तर.

उपपत्ति.

मागें दिलेल्या आकृती वरूनच

$$\frac{क्ष}{श} = \frac{य + क्ष}{दी.}$$

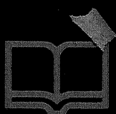
$$\therefore दी = \frac{श\,(य + क्ष)}{क्ष}$$

$$\therefore दी = \frac{य\,श}{क्ष} + श \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

याच समीकरणावरून

$$य = \frac{क्ष\,दी - क्ष\,श}{श}$$

$$\therefore य = \frac{क्ष\,(दी - श)}{श} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$



समीकरण (१) व (२) यावरून दोन्ही सूत्रांची सिद्धि झाली.

सूत्रम्—छायाग्रयोरंतरसंगुणा भा छायाप्रमाणांतरहृद्भवेद्भूः भूशंकुघातः प्रभया विभक्तः प्रजायते दीपशिखौच्यमेव ॥ त्रैराशिकेनैव यदेतदुक्तं व्याप्तं स्वभेदैर्हरिणेव विश्वम् ॥

अर्थ—दोन्ही छायांच्या अग्रामधील अंतरानें छायेस गुणून त्यास दोन्ही छायांच्या लांब्यांच्या अंतरानें भागिलें असतां भूमी ह्मणजे दीपापासून छायेच्या अग्रापर्यंत अंतर येतें.

वरील पद्धतीनें काढलेली भूमी व शंकु यांच्या गुणाकारास छायेनें भागिलें असतां दीपाची उंची येते.

ज्याप्रमाणें ईश्वरानें आपल्या भिन्न भिन्न स्वरूपानें विश्व व्यापिलें आहे, तसें हें सर्व छायाव्यवहारांतील गणित त्रैराशिकानें व्याप्त आहे.

उदाहरणम्—शंकोर्भार्कमितांगुलस्य सुमते दृष्टा किलाष्टांगुला छायाग्राभिमुखे करद्वयमिते न्यस्तस्य देशे पुनः ॥ तस्यैवार्कमितांगुला यदि तदा छाया प्रदीपांतरं दीपौच्च्यं च कियद्वद व्यवहृतिं छायाभिधां वेत्सिचेत् ।

अर्थ—एका दीपापासून कांहीं अंतरावर १२ अंगुलें उंचीचा एक शंकू ठेविला, तेव्हां त्याची छाया ८ अंगुलें पडली. पुढें तोच शंकू छायेच्याच दिशेमध्यें पूर्व स्थानापासून दोन हात अंतरावर ठेविला, त्याची छाया १२ अंगुलें पडली तर दीपापासून छायेच्या अग्रांचें अंतर काय व दीपाची उंची काय ?

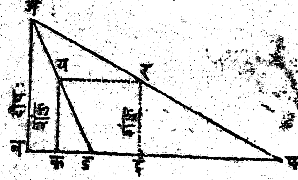
उत्तरनिष्काशनक्रिया.

छायाग्रांमधील अंतर (४८—८+१२) म्हणजे ५२ यास छाया ८ नें गुणून ४१६ यास छायांतर (१२—८) म्हणजे ४ नें भागून १०४ अंगुळें. हें दीपापासून पहिल्या छायाग्रापर्यंत अंतर झालें हें उत्तर.

छायाग्रांतर ५२ यास १२ नें गुणून व छायांतर ४ नें भागून १५६ अंगुळें हें दीपापासून दुसऱ्या छायाग्रापर्यंत अंतर झालें हें उत्तर.

वर काढलेली भूमि १०४ यास १२ नीं गुणून व ८ नीं भागून १५६ अंगुळें दिव्याची उंची हें उत्तर.

उपपत्ति.



येथें अब दीपौच्य = दी; यक शंकु = श; बक = य; कड = क्ष; कई = अ; ईफ = क्षा;

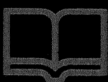
आणि बई = या, अशा संज्ञा देऊन

$$\frac{क्ष}{श} = \frac{क्ष + य}{दी}$$

$$\therefore, दी = \frac{क्षश + यश}{क्ष} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\frac{क्षा}{श} = \frac{क्षा + या}{दी}$$

$$\therefore दी = \frac{क्षाश + याश}{क्षा} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$



समीकरण (१) व (२) यांतील किमतीसमान आहेत म्हणून

$$\frac{\text{क्षश} + \text{यश}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{क्षाश} + \text{याश}}{\text{क्षा}}$$

दोन्ही पक्षांस शनें भागून

$$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{क्षा} + \text{या}}{\text{क्षा}}$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} + १ = \frac{\text{या}}{\text{क्षा}} + १$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{या}}{\text{क्षा}}$$

यांत या = य + अ ही किंमत ठेऊन

$$\frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{य} + \text{अ}}{\text{क्षा}}$$

$$\therefore \text{य क्षा} = \text{क्ष य} + \text{अ क्ष}$$

$$\text{य क्षा} - \text{क्ष य} = \text{अ क्ष}$$

$$\text{य} (\text{क्षा} - \text{क्ष}) = \text{अ क्ष}$$

$$\text{य} = \frac{\text{अ क्ष}}{\text{क्षा} - \text{क्ष}}$$

उभय पक्षांत क्ष मिळवून

$$\text{य} + \text{क्ष} = \frac{\text{अ क्ष}}{\text{क्षा} - \text{क्ष}} + \text{क्ष}$$

$$\text{य} + \text{क्ष} = \frac{\text{अ क्ष} + \text{क्षा क्ष} - \text{क्ष}^२}{\text{क्षा} - \text{क्ष}}$$

$$\text{य} + \text{क्ष} = \frac{\text{क्ष}\,(\text{अ} + \text{क्षा} - \text{क्ष})}{\text{क्षा} - \text{क्ष}}$$

येथें (अ + क्षा − क्ष) हें दोन छायाग्रांमधील अंतर आहे व य + क्ष यास भूमी अशी संज्ञा देऊन

$$\text{भूमि} = \frac{\text{क्ष} \times \text{छायाग्रांतर}}{\text{क्षा} - \text{क्ष}}$$

$$\text{तसेंच}\quad \frac{\text{क्ष}}{\text{श}} = \frac{\text{भूमि}}{\text{दि}}$$

$$\therefore \text{दी} = \frac{\text{श} \times \text{भू}}{\text{क्ष}}$$

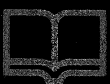
म्हणून सर्व सूत्राची इष्टसिद्धि झाली.

श्लोकः—यत्किंचिद्गुणभागहारविधिना बीजेऽत्र वा गण्यते तत्त्रैराशिकमेव निर्मलधियामेवावगम्यं विदाम् ॥ एतद्यद्बहुधाऽस्मदादिजडधीधीवृद्धिबुद्ध्या बुधैस्तद्भेदान्सुगमान्विधाय रचितः प्राज्ञैः प्रकीर्णादिकम् ॥

अर्थ—बीजगणितामध्यें किंवा अंगगणितामध्यें जें गणित गुणाकार व भागाकार रीतीनें केलें जातें तें सर्व त्रैराशिकच होय. हें विद्वान लोकांस माहीत आहे. तेंच आमच्या सारख्या बुद्धिमंद लोकांस बुद्धिवृद्धि व्हावी या हेतूनें सोपे प्रकार करून व्यस्तविधि, पंचराशिक वगैरे प्रकीर्णादिक गणित रचिलेलें आहे.

याप्रमाणें छायाव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.



अंकपाश प्रकरणम्.

सूत्रम्—स्थानांतमेकादिचयांकघातः संख्याविभेदा नियतैः स्युरंकैः ॥ भक्तोंकमित्यांकसमासनिघ्नः स्थानेषु युक्तो मितिसंयुतिः स्यात् ॥

अर्थ—दिलेल्या अंकस्थानाइतक्या ठिकाणीं एक अंकापासून एकोत्तरानें अनुक्रमानें अंक मांडून त्यांचा गुणाकार केला असतां दिलेल्या अंकांचे संख्याभेद होतात.

संख्याभेदांस दिलेल्या अंकांच्या बेरजेनें गुणून त्यास अंकसंख्येनें भागावें. नंतर तो भागाकार एकाधिक स्थानानें अंकस्थानाइतक्या ठिकाणीं एका खालीं एक मांडून बेरीज करावी ह्मणजे ती संख्याभेदांची बेरीज होते.

उदाहरणम्—द्विकाष्टकाभ्यां त्रिनवाष्टकैर्वा निरंतरं द्व्यादिनवावसानैः ॥ संख्याविभेदाः कति संभवंति तत्संख्यकैक्यानि पृथक् वदाशु ॥

अर्थ—२ आणि ८ या दोन अंकांनीं; ३, ९, व ८ या तीन अंकांनीं; आणि २ पासून ९ पर्यंत क्रमिक ८ अंकांनीं भिन्न भिन्न प्रकारच्या संख्या अंकविपर्यासानें किती किती होतील ? व त्या संख्याभेदांच्या बेरजा काय होतील हें पृथक् पृथक् सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

उदाहरण पहिलें—यांत २ व ८ हे अंक असून अंक संख्या २ आहे म्हणून २ स्थानापर्यंत १ पासून एकोत्तरानें अंक मांडून त्यांचा गुणाकार केला तो १ × २ = २ संख्याभेद झाले हें उत्तर.

आतां २ संख्याभेदांनीं झालेल्या संख्या ८२ व २८ ह्या आहेत, यांची बेरीज ११० होते ही बेरीज सूत्रांत दिलेल्या रीतीनें करून दाखवितों.

संख्याभेद् २ यांस, सांगितलेले अंक २, ८ यांची बेरीज १० हिनें गुणून २० यास अंकमिती २ नें भागून १० भागाकार आला तो एका-खालीं एक दोन ठिकाणीं एकाधिकस्थानानें मांडून बेरीज केली तर $\frac{\begin{matrix}१० \\ १०\end{matrix}}{११०}$ म्हणून ११० संख्याभेदांची बेरीज झाली हें उत्तर.

उदाहरण दुसरें—यांत ३, ९, ८ असे तीन अंक आहेत. म्हणून एकापासून ३ पर्यंत क्रमानें अंक मांडून त्यांचा गुणाकार केला तो १ × २ × ३ = ६ संख्याभेद हें उत्तर.

आतां संख्याभेद ६ त्यांस ३, ९, ८ यांच्या बेरजेस २० नें गुणून १२० यांस अंकमिति ३ नें भागून ४० हा भागाकार एकाधिकस्थानानें एका खालीं एक असा तीन स्थानीं मांडून बेरीज केली तर, $\frac{\begin{matrix}४० \\ ४० \\ ४०\end{matrix}}{४४४०}$ म्हणून संख्याभेदांची बेरीज ४४४० हें उत्तर.

उदाहरण तिसरें—यांत अंक संख्या ८ आहे म्हणून.

१ × २ × ३ × ४ × ५ × ६ × ७ × ८ = ४०३२० संख्याभेद हें उत्तर.

$$\frac{४०३२० (२ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९)}{८} =$$

२२१७६० हा भागाकार आला

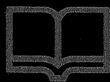
∴ २२१७६०
२२१७६०
२२१७६०
२२१७६०
२२१७६०
२२१७६०
२२१७६०
२२१७६०

२४६३९९९७५३६०

ही संख्याभेदांची बेरीज हें उत्तर.

उपपत्ति.

या सूत्रामध्यें सांगितलेल्या अंकांतून प्रत्येक वेळीं सर्व



अंक घेऊन त्यांनीं जे संख्याभेद होतात ते काढण्याची रीति सांगितली आहे. म्हणजे न संख्यांक वस्तूंतून प्रत्येक वेळीं न संख्यांकवस्तु घेऊन त्याचे सार्वांशिक विपर्यय काढण्याची रीति आहे.

मागें मिश्रव्यवहाराच्या अंतिम सूत्राच्या उपपत्तीमध्यें न संख्यांक वस्तूंचे सार्वांशिक विपर्यय |न होतात असें सिद्ध करून दाखविलें आहे. |न याचा अर्थ १ पासून क्रमिक न संख्यांचा गुणाकार असा आहे.

आतां फक्त सूत्रांतील संख्याभेदाच्या बेरजेच्या रीतीची उपपत्ति सांगतों.

प्रथम ३, ९, ८ या तीन अंकांनीं होणाऱ्या संख्याभेदांची बेरीज करूं—

तीन अंकांनीं होणारे संख्याभेद

|३ म्हणजे १ × २ × ३ = ६ आहेत. ते क्रमानें मांडून दाखवितों.

३९८
३८९
९३८
९८३
८९३
८३९
————
४४४०

यांत शतंच्यास्थानीं ३ हे |३−१ वेळां येतात. ९ हे |३−१ वेळां, व ८ हे |३−१ वेळां येतात. व दहंच्या स्थानीं ३ हे |३−१ वेळां, ९ हे |३−१ वेळां, व ८ हे |३−१ वेळां येतात.

तसेंच एकंच्या स्थानीं ३ हे $\underline{|३-१}$ वेळां, ९ हे $\underline{|३-१}$ वेळां व ८ हे $\underline{|३-१}$ वेळां येतात. कारण वस्तु संख्येंतून १ वजा-करून त्याचे जे सार्वांशिक विपर्यय होतात. तितके वेळां ते येणार

$$\therefore ३\,\underline{|३-१} \times १०^{२} + ९\,\underline{|३-१} \times १०^{२} + ८\,\underline{|३-१} \times १०^{२}$$
$$+ ३\,\underline{|३-१} \times १०^{१} + ९\,\underline{|३-१} \times १० + ८\,\underline{|३-१} \times १०^{१}$$
$$+ ३\,\underline{|३-१} \times १०^{०} + ९\,\underline{|३-१} \times १०^{०} + ८\,\underline{|३-१} \times १०^{०}$$
$$= \underline{|३-१}\,(३ + ९ + ८)\,१०^{२} +$$
$$\underline{|३-१}\,(३ + ९ + ८)\,१०^{१} +$$
$$\underline{|३-१}\,(३ + ९ + ८)\,१०^{०}$$
$$= \underline{|३-१}\,(३ + ९ + ८)\,(१०^{०} + १०^{१} + १०)$$

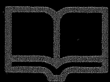
यास ३ नें गुणून व भागून

$$= \frac{\underline{|३-१} \times ३\,(३ + ९ + ८)\,(१०^{०} + १०^{१} + १०^{२})}{३}$$

$$= \frac{\underline{|३}\,(३ + ९ + ८)\,(१ + १० + १०^{२})}{३}$$

ही संख्याभेदांची बेरीज झाली. यावरून सूत्रांत दिलेल्या रीतीची उपपत्ति सहज लक्षांत येईल. ही विशेष उदाहरणास लक्षून उपपत्ति झाली.

आतां सामान्य रीतीनें उपपत्ति करूं. अ, ब, क, ड, इत्या-दि न अंक आहेत अशी कल्पना करून, न अंकाचे जे सार्वां-शिक विपर्यय होतील त्यांतील पहिल्या रांकेंत अ हा अंक,



(न-१) अंकांचे जे सार्वांशिक विपर्यय होतील तितके वेळां येईल. म्हणून अ हा अंक $\lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}$ वेळां येईल. तसेंच ब, क, ड इत्यादि अंकही तितकेच वेळां येतील. व दुसऱ्या रांकेमध्येंही प्रत्येक अंक $\lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}$ वेळां येतील. तसेंच तिसऱ्या चवथ्या इत्यादि उभ्या रांकेमध्यें प्रत्येक अंक येतील.

$$
\begin{aligned}
\therefore\ & \lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}\,(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\ldots\ldots\text{न})\,\text{१०}^{\text{०}} \\
+\ & \lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}\,(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\ldots\ldots\text{न})\,\text{१०}^{\text{१}} \\
+\ & \lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}\,(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\ldots\ldots\text{न})\,\text{१०}^{\text{२}} \\
+\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ & \lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}\,(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\ldots\ldots\text{न})\,\text{१०}^{\text{न}-\text{१}} \\
=\ & \lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}\,(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}+\ldots\text{न})(\text{१०}^{\text{०}}+\text{१०}^{\text{१}}+\text{१०}^{\text{२}}+\ldots\text{१०}^{\text{न}-\text{१}}) \\
=\ & \frac{\lfloor\underline{\text{न}-\text{१}}}{\text{न}}\times\frac{\text{न}}{\text{१}}(\text{अ}+\text{ब}+\ldots\text{न})(\text{१}+\text{१०}+\text{१०}^{\text{२}}+\ldots\text{१०}^{\text{न}-\text{१}}) \\
=\ & \frac{\lfloor\underline{\text{न}}\,(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}\ldots+\text{न})(\text{१}+\text{१०}+\text{१०}+\text{१०}^{\text{३}}+\ldots\text{१०}^{\text{न}-\text{१}})}{\text{न}}
\end{aligned}
$$

म्हणून सर्वेष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—पाशांकुशाहिडमरूककपालशूलैः खट्वांगशक्तिशरचापयुतैर्भवंति ॥ अन्योन्यहस्तकलितैः कति मूर्तिभेदाः शंभोर्हरेरिव गदारिसरोजशंखैः ॥

अर्थ—पाश, अंकुश, सर्प, डमरू, कपाल, शूल, खट्वांग, शक्ति, शर, धनु, हीं १० आयुधें शंकरानें परस्पर हातांत

सर्वच क्रमभेदानें धारण केली असतां त्याचे मूर्तिभेद किती होतील ? व गदा, चक्र, कमल, व शंख हीं चार आयुधें विष्णूनें परस्पर हातांत सर्वच क्रमभेदानें धारण केलीं असतां त्याचे मूर्तिभेद किती होतील ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

शंकराचीं आयुधें १० आहेत

∴ १ × २ × ३ × ४ × ५ × ६ × ७ × ८ × ९ × १० =

३६२८८०० शिवमूर्तिभेद हें उत्तर.

विष्णूचीं आयुधें ४ आहेत.

∴ १ × २ × ३ × ४ = २४ भेद हें उत्तर.

सूत्रम्—यावत्स्थानेषु तुल्यांकास्तद्भेदैस्तु पृथक्कृतैः ॥ प्राग्भेदा विह्रता भेदास्तत्संख्यैक्यं च पूर्ववत् ॥

अर्थ—सांगितलेल्या अंकांत कांहीं समान अंक असल्यास, जितक्या ठिकाणीं समान अंक असतील तितक्या ठिकाणचे अंक भिन्न समजून त्यांचे संख्याभेद पृथक् काढून त्या भेदांनीं, सांगितलेल्या सर्व अंकांचे पूर्वी सांगितल्या प्रकारानें संख्याभेद काढून त्यांस भागावें. म्हणजे इष्टसंख्याभेद होतात, त्यांची बेरीज पूर्वीच्या सूत्रांत दिलेल्या रीतीनें करावी.

उदाहरणम्—द्विद्व्येकभूपरिमितैःकति संख्यकाः स्युस्तासां युतिं च गणकाऽऽशु मम प्रचक्ष्व ॥ अंभोधिकुंभिशरभूतशरैस्तथांकैश्चेदंकपाशमितियुक्तिविशारदोऽसि ॥

अर्थ—२, २, १, १ ह्या चार अंकांनीं भिन्न प्रकारच्या संख्या किती होतील. व ४, ८, ५, ५, ५, ह्या पांच अंकांनीं संख्याभेद किती होतील हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पहिल्या उदाहरणांत २, २, १, १, हे चार अंक भिन्न समजून त्यांचे संख्याभेद १ × २ × ३ × ४ = २४ इतके झाले. व प्रथम दोन ठिकाणीं दोन तुल्य अंक आहेत. ते भिन्न समजून त्यांचे संख्याभेद १ × २ = २ झाले व पुढील दुसरे दोन अंक समान आहेत त्यांचेही भेद २ च झाले यांनीं पूर्वीच्या संख्याभेदां २४ स भागिले तेव्हां २४ ÷ २ = १२ आणि १२ ÷ २ = ६ संख्याभेद हें उत्तर

हे भेद मांडून दाखवितो.

२२११, २१२१, २११२, १२१२, १२२१, ११२२, आतां संख्याभेद ६ × (२ + २ + १ + १) = ३६ यांस अंकमिती ४ नें भागून ९ भागाकार आला. तो एकाधिक स्थानानें एका खालीं एक मांडून

```
९०००
 ९००
  ९०
   ९
────
९९९९
```

९९९९ संख्याभेदांची बेरीज हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्यें

४, ८, ५, ५, ५ हे पांच अंक भिन्न समजून १ × २ × ३ × ४ × ५ = १२० हे संख्या भेद झाले. यांत तीन ठिकाणीं समान अंक आहेत त्यांचे ते भिन्न असतां १ × २ × ३ = ६ संख्याभेद होतात. यांनीं पूर्वींच्या भेदां १२० स भागून २० हे इष्ट संख्याभेद झाले. हें उत्तर.

आतां संख्याभेद २० (४ + ८ + ५ + ५ + ५) ÷ ५ = १०८ भागाकार आला

```
∴   १०८
     १०८
      १०८
       १०८
        १०८
───────────
११९९९८८
```

११९९९८८ बेरीज हें उत्तर.

उपपत्ति.

अंकांचे ऐवजीं अक्षरें धरून उपपत्ति करूं.

कल्पना करा, कीं, न अक्षरें आहेत; त्यांपैकीं अ हें अक्षर प वेळां, ब अक्षर क वेळां, आणि स अक्षर र वेळां, आलेलें आहे; व बाकीं भिन्न अक्षरें आहेत.

ह्या न अक्षरांचे सार्वांशिक विपर्यय क्ष होतात असें धरूं.

आतां ह्या क्ष सार्वांशिक विपर्ययांपैकीं प्रत्येक भेदामध्यें अ हें अक्षर प वेळां आलें आहे. तीं जर भिन्न असतीं तर |प असे भेद एका भेदांत झाले असते; मिळून क्ष भेदामध्यें क्ष×|प इतके भेद झाले असते. त्याचप्रमाणें ब हें अक्षर क वेळां आलें आहे त्या ऐवजीं जर भिन्न अक्षरें असतीं तर |क भेद एका भेदांत होतील. म्हणून क्ष × |प या सर्व भेदांमध्यें क्ष×|प × |क एकंदर भेद होतील. तसेंच स हें अक्षर र वेळां आहे त्यासंबंधानें |र भिन्न भेद होतील व एकंदर भेद क्ष. |प . |क . |र इतके होतील. यांमध्यें मात्र सर्व भिन्न अक्षरें आहेत. म्हणून ते भेद, न अक्षरामध्यें सर्व अक्षरें भिन्न असतां जे भेद |न होतात त्यांचे बरोबर आहेत.

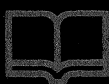
∴ क्ष × |प × |क × |र = |न

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{|\text{न}}{|\text{प} \cdot |\text{क} \cdot |\text{र}}$$

म्हणून सूत्रेष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—स्थानांतमेकापचितांतिमांकघातोऽसमांकैश्च मितिप्रभेदाः ॥

अर्थ—दिलेल्या असमान अंकांवून प्रत्येक वेळीं कांहीं नियमित अंक घेऊन संख्याभेद करावयाचे असल्यास, प्रत्येक भेदांत जीं अंकस्थानें असावयाचीं तितक्या ठिकाणीं अंतिम अंक



एकेकानें उणा करीत जाऊन मांडून त्यांचा गुणाकार केला असतां इष्टभेद (पाक्षिक विपर्यय) येतात.

उपपत्ति.

मागें मिश्रव्यवहार प्रकरणाच्या अंतिम सूत्राची उपपत्ति देत असतां तीमध्यें न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां र वस्तु घेऊन भेद केले असतां.

न (न – १) (न – २) .... (न – र + १)

इतके होतात अशी सारणी सिद्ध करून दाखविली आहे. तीच अंकाविषयीं मानिली असतां प्रस्तुत सूत्राची सिद्धि होते.

उदाहरणम्—स्थानषट्कस्थितैरंकैरसमैः खेन वर्जितैः ॥ कति संख्या विभेदाः स्युर्यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥

अर्थ—एकापासून क्रमिक ९ अंकांतून प्रत्येक वेळीं सहा सहा अंक घेऊन संख्याभेद किती होतील ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

न (न – १) (न – २) .... (न – र + १)

यांत न = ९ व र = ६ ठेवून

९ × ८ × ७ × ६ × ५ × ४ = ६०४८०

संख्याभेद हें उत्तर.

सूत्रम्—निरेकमंकैक्यमिदं निरेकस्थानांत मेकापचितं विभक्तम् ॥ रूपादिभिस्तन्निहतेः समाः स्युः संख्यावि-भेदा नियतेऽकयोगे ॥ नवान्वितस्थानकसंख्यकाया ऊ-नेऽकयोगे कथितं तु वेद्यम् ॥ संक्षिप्तमुक्तं पृथुताभयेन नांतोऽस्ति यस्माद्गणितार्णवस्य ॥

अर्थ—अंकांची बेरीज व अंकस्थानें यांवरून संख्याभेद

काढणें झाल्यास, अंकांच्या बेरजेंतून १ वजा करून बाकी राहील ती, स्थानसंख्येंत १ कमी इतक्या ठिकाणीं, एकेकानें कमी करीत जाऊन मांडून त्यांस क्रमानें १, २, ३ इत्यादि अंकांनीं भागावें. नंतर आलेल्या भागाकारांचा गुणाकार केला असतां संख्याभेद येतात.

ही रीति, स्थानसंख्येंत ९ मिळवून जी संख्या होतील तींपेक्षां दिलेली बेरीज कमी असल्यास, उपयोगीं पडते.

गणितरूपी समुद्राचा कांहीं अंत नाहीं म्हणून विस्तार भयास्तव येथें थोडक्यांत सांगितलें.

उदाहरणम्---पंचस्थानस्थितैरंकैर्यद्यद्योगस्त्रयोदश ॥ कति भेदा भवेत्संख्या यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥

अर्थ---ज्या संख्येमध्यें स्थानें ५ आहेत व त्यांतील अंकांची बेरीज १३ होईल असे संख्याभेद किती होतील हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

अंकांची बेरीज १३ यांत १ वजा करून १२; व स्थानें ५ यांत १ वजा करून ४ आले. म्हणून

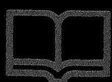
$\frac{१२}{१} \times \frac{११}{२} \times \frac{१०}{३} \times \frac{९}{४} = ४९५$

संख्याभेद हें उत्तर.

उपपत्ति.

या सूत्राची उपपत्ति समजण्याकरितां एकदोन उदाहरणेंच साग्र क्रियेनें सोडवून दाखवितों म्हणजे सहज सूत्राची उपपत्ति लक्ष्यांत येईल.

प्रथम स्थानें ३ व अंकांची बेरीज ९ आहे असें मानून संख्याभेद आणूं.

34 

ज्या अर्थी बेरीज ५ व स्थानें ३ आहेत ह्मणून ३, १, १, हे अंक किंवा २, २, १ हे अंक संख्येमध्यें येतील यांवांचून कोणतेही अंक येणार नाहींत

आतां ३, १, १ यांचे सार्वांशिक विपर्यय $\frac{\underline{|३}}{\underline{|२}}$ इतके होतात. व २, २, १ यांचे सार्वांशिक विपर्यय $\frac{\underline{|३}}{\underline{|२}}$ इतके होतात म्हणून सर्व संख्याभेद

$$\frac{\underline{|३}}{\underline{|२}} + \frac{\underline{|३}}{\underline{|२}} = \frac{१ \times २ \times ३ + १ \times २ \times ३}{१ \times २}$$

$$= \frac{३ (२ + २)}{२} = \frac{४ \times ३}{१ \times २} = ६ \text{ भेद}$$

म्हणून सूत्रक्रिया सिद्ध झाली.

अथवा स्थानें ४ व अंकांची बेरीज ५ धरून सोडवूं.

ज्याअर्थी स्थानें ४ आहेत त्याअर्थी २, १, १, १ हेच अंक संख्येमध्यें असणार तेव्हां यांचे सार्वांशिक विपर्यय

$\frac{\underline{|४}}{\underline{|३}} = ४$ होतात.

$\therefore \frac{१ \times २ \times ३ \times ४}{१ \times २ \times ३} = \frac{४}{१} = ४$ भेद व सूत्र साद्दश्याकरितां

$\frac{४ \times ३ \times २}{१ \times २ \times ३} = ४$ हें उत्तर.

ह्मणून इष्ट सिद्धि झाली.

ही रीती, स्थान संख्येंत ९ मिळवून जें येईल त्यापेक्षां अंकांची बेरीज कमी असेल तेव्हांच लागू पडते. हें उदाहरण क्रिया करितांना सहज लक्ष्यांत येईल.

याप्रमाणें अंकपाश प्रकरणाचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

श्लोक—न गुणो न हरो न कृतिर्न घनः पृष्टस्तथाऽपि दुष्टानाम् ॥ गर्वितगणकवटूनां स्यात्पातोऽवश्यमंकपाशेऽस्मिन् ॥

अर्थ—दुसऱ्यांचा छळ करणारे असे दुष्ट, व गर्विष्ट गणकबटूंला गुणाकार, भागाकार, वर्ग, किंवा घन यांपैकीं विचारिलें असतां ते सहज सांगतील करितां त्यांपैकीं कोणती गोष्ट न विचारतां या अंकपाशांतील एखादें उदाहरण विचारिलें असतां त्या दुष्ट गणकांचा अवश्य पाडाव होईल.

श्लोकः—येषां सुजातिगुणवर्गविभूषितांगी शुद्धाखिलव्यवहृतिः खलु कंठसक्ता ॥ लीलावतीह सरसोक्तिमुदाहरंती तेषां सदैव सुखसंपदुपैतिवृद्धिम् ॥

अर्थ—गुणाकार वर्ग इत्यादिकांनीं जिचीं प्रकरणें विभूषित झालीं आहेत, जिचीं क्षेत्र व्यवहारादि प्रकरणें स्पष्ट आहेत, व जींत माधुर्य विशेष आहे; अशा प्रकारची ही लीलावती ज्यांना उत्तम येत असेल त्यांना सुख व संपत्ति ह्या कमी पडणार नाहींत सदैव वृद्धीच होत जाईल.

श्लोकः—अष्टौ व्याकरणानि षट् च भिषजां व्याचष्टताः संहिताः षट् तर्कान् गणितानि पंच चतुरो वे[illegible]

ते स्म यः ॥ रत्नानां त्रितयं द्वयं च बुबुधे मीमांसयोरं-
तरं सद्ब्रह्मैकमगाधबोधमहिमा सोऽस्याः कविर्भास्करः ॥

अर्थ—आठ व्याकरणें, सहा वैद्य संबंधी संहिता, सहा प्रकारचीं न्यायशास्त्रें, पांच प्रकारचीं गणितशास्त्रें चार वेद, पूर्वमीमांसा, उत्तरमीमासां, गीताभाष्य, दशोपनिषत्भाष्य शारीरभाष्य, ह्या ग्रंथांचें अध्ययन केलेला असा भास्कराचार्य नामक कवि, हा या लीलावतीचा कर्ता होय.

ह्याप्रमाणें लीलावतीचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

शुद्धिपत्र.

अशुद्ध.	शुद्ध.	पृष्ठ.	पंक्ति.
यद्धनहस्त	यद्वनहस्त	३	१०
१२	× १२	७	८
इष्टांकांचा	इष्टांकाचा	९	९
$\frac{१}{५} \times \frac{३}{७}$	$\frac{५}{१} \times \frac{३}{७}$	२३	१६
॰रणैर्भक्त	चरणैर्भक्त	२६	१९
ात्कियत्	तत्कियत्	४२	२३
ज्ञ	ज्ञ रु.	५५	१८
४	२४	६४	२३
९	४	६९	२
स्वर्णैक्य	स्वर्णैक्य	७०	१५
वर्णैक्य	वर्णैक्य	७०	१५
१३ × क्ष	१२ × क्ष	७१	१६
युतिवर्णैक्य.	युतिजातवर्ण	७२	१
+ न	− ९	८१	११
$४(न - ३)^{३}$	$४(न - ४)^{३}$	८४	२२
नै	०	८५	१६
सवर्धन	सर्वधन	८७	११
चालन	चालून	८९	१८
कृत्येक	कृत्यैक	११२	१
इष्टे कर्ण	इष्टे × कर्ण	११६	५
मुळांतर	मूळांतर	११८	३
समाता	समता	१२५	

अशुद्ध.	शुद्ध.	पृष्ठ.	पंक्ति.
वेण्णो	वेण्वो	१३१	११
भुम्यर्ध	भूम्यर्ध	१३६	१०
(अफ − अम)	(अफ − अम)^2	१५७	१०
बं अं + अं बं	बं अं + अं बं	१६६	८
तत्वेंद्ध	तत्वेंदु	१६६	१३
१०५०	१२५०	१७६	८
विघ्न	निघ्न	१८६	६
नंतर	नंतर तिला	१९०	२१
खळगाची	खळग्याची	१९१	१०
भँ^{2}	भूँ^{2}	१९४	१९
+ म + ३ ल)^2	+ (म + ३ ल)^2	१९५	१
म	म^2	१९५	८
प	पर्दें	१९५	१५
श	श^2	२०९	२
९ श	४ श^2	२१०	१७
तलातर	तलांतर	२१२	१६
स्याकियती	स्याल्कियती	२१२	२१
|३ १	|३ − १	२२१	६
८| ३ − १	८ |३ − १	२२१	६